



PROJETO DE GRADUAÇÃO

ANÁLISE DE ESCOAMENTOS DE FLUIDOS VISCOSOS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Por,

Thiago Ribeiro Nicolaidis

Brasília, 4 de julho de 2018

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO

**ANÁLISE DE ESCOAMENTOS DE FLUIDOS
VISCOSOS UTILIZANDO O MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO**

Por,
Thiago Ribeiro Nicolaidis

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico

Banca Examinadora

Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque _____

Prof. Dr. Taygoara Felamingo de Oliveira _____

Me. Álvaro Campos Ferreira _____

Brasília 4 de julho de 2018

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer aos meus pais, Hiraclis e Regina, e à minha irmã, Thais, que sempre me proporcionaram base e suporte para alcançar tudo que eu almejei na vida. Com certeza, eu só pude chegar aonde eu cheguei por causa deles.

Ao professor Éder pela incansável orientação e pela confiança em minha capacidade para conseguir desenvolver o presente trabalho. A sua paciência e didática foram ingredientes fundamentais para a conclusão desse Projeto de Graduação.

Ao professor Eugênio por ter confiado e investido em mim desde o começo da minha graduação. Sua orientação e amizade com certeza marcou de forma positiva a minha iniciação no mundo acadêmico.

Ao professor Taygoara por ter dedicado seu tempo em explorar algumas questões acerca do estudo desenvolvido. Cada uma de suas observações foi muito bem anotada e se reflete no presente trabalho.

À Universidade de Brasília e a todos os seus Professores com quem tive contato e aos seus funcionários. Eu reconheço o privilégio que foi poder ter cursado o curso de Engenharia Mecânica nessa grande instituição.

Por fim, aos meus amigos cuja amizade tornou a experiência universitária ainda mais leve e agradável. Essa experiência foi, sem dúvidas, uma das melhores fases da minha vida, em grande parte, devido a eles.

Resumo

Este trabalho propõe uma metodologia para simular o escoamento de fluidos viscosos utilizando o método dos elementos de contorno sem precisar discretizar o domínio do problema. As equações de Navier-Stokes são trabalhadas matematicamente para incorporar as seguintes hipóteses: regime permanente, incompressibilidade, campo de pressão dado pela função de penalidade e variações de altura desprezíveis. Com essas hipóteses, é demonstrada a analogia da equação resultante com as equações de Navier da mecânica dos sólidos, de forma que seja possível utilizar toda a vasta literatura de MEC aplicados à mecânica dos sólidos para a solução do problema. As integrais de domínio são convertidas em integrais de contorno equivalentes através do método da integração radial e da aproximação do termo não-linear utilizando funções de base radial. Com isso, é possível resolver o problema utilizando apenas a discretização do seu contorno e um conjunto de pontos internos utilizados na interpolação do termo não linear. A validação do código é feita utilizando dois casos lineares, o escoamento entre placas planas gerado pelo movimento relativo de uma delas (escoamento de Couette) e o gerado por um gradiente de pressão (escoamento de Poiseuille). Utilizando essa metodologia, é feita a análise do escoamento em uma cavidade.

Palavras-chaves: Método dos Elementos de Contorno. Método da Integração Radial. Equações de Navier-Stokes. Escoamento de fluidos viscosos.

Abstract

This present work proposes a new methodology to simulate viscous fluid flows using the boundary element method without the domain discretization. The Navier-Stokes equations are mathematically treated to incorporate the following hypothesis: steady flow, incompressibility, pressure field approximated by the penalty function and negligible variations of height. It's demonstrated the analogy between the resulting equations and the Navier equations from the solid mechanics in such a way that's possible to use the vast literature of BEM in solid mechanics to solve the fluid mechanics problem. Domain integrals are transformed in equivalent boundary integrals through the radial integration method and the approximation of the non-linear term by a series of prescribed basis functions. In this way, it's possible to solve the problem without discretizing the domain, but using just the discretization of the boundary and a set of points in which the nonlinear term is interpolated. The validation of the code is made by two linear cases, flow between two parallel plates generated by the relative movement of one of them and generated by a gradient of pressure. Using this methodology, it's studied the square cavity flow.

Key-words: Boundary element method. Radial integration method. Navier-Stokes equations. Viscous fluid flow.

Lista de Figuras

Figura 3.2.1–Contorno do problema discretizado. (ALBUQUERQUE, 2016)	15
Figura 4.1.1–Visualização das variáveis geométricas do problema. (ALBUQUERQUE, 2016)	25
Figura 4.3.1–Fluxograma do algoritmo implementado.	33
Figura 5.1.1–Geometria e condições de contorno do escoamento de Couette estudado.	34
Figura 5.1.2–Malha utilizada para a simulação do escoamento de Couette.	35
Figura 5.1.3–Perfil de velocidades resultante do escoamento de Couette em $x = 2, 5$	35
Figura 5.1.4–Campo do módulo das velocidades calculadas.	37
Figura 5.1.5–Geometria e condições de contorno do escoamento de Hagen-Poiseuille estudado.	37
Figura 5.1.6–Malha utilizada para a simulação do escoamento de Hagen-Poiseuille.	38
Figura 5.1.7–Perfil de velocidades resultante do escoamento de Hagen-Poiseuille em $x = 2, 5$	38
Figura 5.2.1–Geometria e condições de contorno do escoamento em cavidade estudado.	41
Figura 5.2.2–Análise da convergência da componente em y da velocidade no ponto $x = y = 0, 75$	42
Figura 5.2.3–Análise da convergência da norma do vetor velocidade no ponto $x = y = 0, 75$	42
Figura 5.2.4–Perfil de velocidade na seção $x = 0, 5$	44
Figura 5.2.5–Linhas de corrente do resultado obtido pelo programa EscoaConst2D.	45
Figura 5.2.6–Linhas de corrente do resultado obtido pela metodologia implementada por Prof. Dr. Taygoara.	45
Figura A.1.1–Escoamento de Couette.	53
Figura A.2.1–Escoamento de Hagen-Poiseuille.	54

Lista de Tabelas

Tabela 2.0.1—Analogia entre problemas de análise de escoamentos e problemas elásticos.	9
Tabela 5.1.1—Resultados numéricos da velocidade u para o escoamento de Couette. .	36
Tabela 5.1.2—Resultados numéricos da derivada da velocidade u na direção y para o escoamento de Couette.	36
Tabela 5.1.3—Resultados numéricos da velocidade u para o escoamento de Hagen-Poiseuille em $x = 2, 5$	39
Tabela 5.1.4—Resultados numéricos da derivada da velocidade u na direção y para o escoamento de Hagen-Poiseuille em $x = 2, 5$	39
Tabela 5.1.5—Resultados numéricos da velocidade u para o escoamento de Hagen-Poiseuille, para $x = 5, 0$	40
Tabela 5.1.6—Resultados numéricos da derivada da velocidade u na direção y para o escoamento de Hagen-Poiseuille, para $x = 5, 0$	40
Tabela 5.2.1—Resultado para o $\nabla \cdot \mathbf{v}$ em função da malha e do número de pontos internos utilizados.	43

Lista de abreviaturas e siglas

MEC	Método dos elementos de contorno
MEF	Método dos elementos finitos
MDF	Método das diferenças finitas
MIR	Método da integração radial
CFD	Computational Fluid Dynamics

Lista de símbolos

a_{ij}	Parte antissimétrica do tensor $w_{i,j}$
A	Superfície de um elemento fluido infinitesimal
\mathbf{A}	Matriz do sistema de equações linear
b_i	Força de campo resultante por unidade de massa aplicada a um corpo sólido
\mathbf{b}	Vetor do sistema de equações linear
\mathbf{c}	Matriz de constantes associadas à integração da função delta de Dirac no contorno para a solução do campo de deslocamentos
C_{ijmn}	Tensor constitutivo de um sólido com comportamento elástico linear
\mathbf{C}	Matriz de constantes associadas à integração da função delta de Dirac no contorno para a solução das derivadas do campo de deslocamentos
d	Ponto fonte
\mathbf{e}	Tensor deformação
\mathbf{f}_c	Força de campo resultante por unidade de massa aplicada ao escoamento
\mathbf{F}_{campo}	Forças de campo aplicadas ao escoamento
f_j	j -ésima função de base radial
\mathbf{F}_s	Forças de superfície aplicadas ao elemento fluido infinitesimal
g	Função arbitrária utilizada para a dedução do MIR
\mathbf{G}	Matriz com os coeficientes relativos às forças de superfície no contexto do MEC
H	Matriz com os coeficientes relativos a velocidade no contexto do MEC
\mathbf{I}	Vetor resultante da integral de domínio via MIR

J	Jacobiano da transformação de coordenada
L	Tamanho do elemento
M	Número de pontos de interpolação da função desconhecida
\mathbf{M}	Matriz resultante do MIR associada aos coeficientes a se determinar para a solução do campo de deslocamento
\mathbf{n}	Vetor unitário normal a uma superfície [-]
NE	Número de elementos
NI	Número de pontos utilizados para a interpolação da função desconhecida
npg	Número de pontos de Gauss
\mathbf{O}_m	Matriz com os coeficientes relativos às forças de superfície no contexto do MEC, para a determinação da derivada do campo de deslocamentos na direção m
P	Pressão medida do escoamento
\tilde{P}^*	Pressão modificada adimensional
\tilde{P}	Pressão modificada do escoamento
\mathbf{P}_m	Matriz com os coeficientes relativos ao deslocamento no contexto do MEC, para a determinação da derivada do campo de deslocamentos na direção m
\mathbf{Q}_m	Matriz resultante do MIR associada aos coeficientes a se determinar para a solução da derivada, na direção m , do campo de deslocamento
r	Distância entre o ponto fonte e o ponto campo
r'	Distância entre o ponto campo e o centro da função de base radial
\mathbf{r}	Vetor unitário radial
Re	Número de Reynolds
s_{ij}	Parte simétrica do tensor $w_{i,j}$
S	Contorno real do problema
t	Instante de tempo
t^*	Tempo adimensional

t_{kl}	Solução fundamental para as forças de superfície, do problema de Kelvin
\mathbf{t}	Vetor de forças de superfície
\mathbf{u}	Campo de deslocamento
u_{kl}	Solução fundamental para os deslocamentos, do problema de Kelvin
\mathbf{v}	Campo de velocidades do escoamento
\mathbf{v}^*	Campo de velocidades adimensionais do escoamento
v	Volume específico
v_0	Velocidade de referência
V	Volume infinitesimal de um elemento fluido
\mathbf{w}	Vetor de funções peso
\mathbf{x}	Ponto campo
x^*	Posição adimensional na direção x
y^*	Posição adimensional na direção y
ρ	Massa específica do fluido
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de tensões
Δ	Taxa de deformação volumétrica
μ	Viscosidade absoluta do fluido
ν	Viscosidade cinemática do fluido
λ	Parâmetro de penalidade
λ'	Constante de Lamé
μ'	Constante de Lamé
Ω	Domínio do problema
Γ	Contorno do problema
ν'	Coefficiente de Poisson
ξ	Pontos de Gauss
ω	Pesos de Gauss

α	Ângulo entre o vetor unitário normal e o radial
$\gamma_j^{(i)}$	j -ésimo coeficiente a se determinar em relação à direção i
ϕ	Matriz composta pelas funções de base radial
γ	Vetor com todos os coeficientes a se determinar

Sumário

	1 INTRODUÇÃO	1
1.1	Organização do trabalho	2
	2 EQUAÇÕES GOVERNANTES	4
	3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (MEC)	10
3.1	Formulação Integral de Contorno	10
3.2	Discretização da Equação Integral de Contorno	14
3.3	Formulação Integral de Contorno para a Determinação das Derivadas de u	20
3.4	Discretização da Equação Integral de Contorno das Derivadas de u	21
	4 TRATAMENTO DAS INTEGRAIS DE DOMÍNIO	24
4.1	Método da Integração Radial (MIR)	24
4.2	Discretização das Integrais de Domínio	27
4.3	Solução Numérica do Problema	32
	5 RESULTADOS PARCIAIS	34
5.1	Validação do Código	34
5.1.1	Escoamento de Couette	34
5.1.2	Escoamento de Hagen-Poiseuille	37
5.2	Análise do Escoamento em Cavidade	40
	6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	47
6.1	Conclusões	47
6.2	Trabalhos Futuros	48
	REFERÊNCIAS	49

APÊNDICES	51
APÊNDICE A – SOLUÇÕES ANALÍTICAS DE ESCOAMENTOS	
ENTRE PLACAS PLANAS	52
A.1 Escoamento de Couette	52
A.2 Escoamento de Hagen-Poiseuille	53

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, a Mecânica dos Fluidos está, direta ou indiretamente, envolvida na grande maioria das aplicações de engenharia. É simples notar a importância desse campo de estudos em áreas da engenharia como no projeto de aeronaves e navios, porém ela também é de fundamental importância em vários processos industriais que, numa análise inicial, não deixam isso claro. Tais exemplos são os processos industriais de fabricação de peças metálicas, em que se utiliza do fenômeno de convecção para realizar o resfriamento das peças; e projetos de máquinas de elevação e transporte, como pórticos e guindastes, uma vez que, dependendo da ação do vento do local onde as máquinas vão operar, as forças de arrasto devem ser consideradas.

Dada a sua importância, é fácil entender o porquê de existir tantos pesquisadores desenvolvendo e testando teorias que descrevem o comportamento dos fluidos, tanto do ponto de vista do movimento, quanto do ponto de vista térmico. Porém, uma das grandes dificuldades desse campo de pesquisa é que, geralmente, as equações governantes dos problemas são extremamente complexas e, raramente, possuem soluções analíticas. Assim, as análises dos problemas, normalmente, são feitas através de métodos experimentais ou numéricos.

Os métodos numéricos permitem que diferentes análises para diferentes casos sejam feitas mais rapidamente e de forma mais prática que os métodos experimentais. Além disso, frequentemente, eles permitem a determinação de variáveis que, de outra forma, seriam bem difíceis de serem analisadas. Porém, mesmo com a praticidade e versatilidade das soluções numéricas, são indispensáveis os métodos experimentais, pois são através deles que se validam os resultados numéricos. Não só isso, eles também fornecem dados de entrada importantes para as simulações, como as propriedades físicas dos corpos que estão sendo analisados.

O primeiro método numérico a surgir foi o método das diferenças finitas (MDF) e ele consiste em aproximar as equações governantes do problema usando a expansão local das variáveis. Em seguida, surgiu o método dos elementos finitos (MEF) usado, a priori, para resolver problemas de análise estrutural. Entretanto, com o avanço da capacidade computacional, o MEF atraiu a atenção de pesquisadores e passou a ser utilizado em várias áreas diferentes, tais como: condução de calor, vibrações e escoamento de fluidos viscosos ([KITAGAWA, 2013](#)).

Pouco depois da popularização do MEF, surgiu o métodos dos elementos de contorno (MEC). Ele chamou a atenção do mundo científico por ser um método que necessita de uma menor quantidade de dados de entrada, uma vez que sua malha consiste apenas no contorno do problema e não em todo o seu domínio, como necessário nos outros dois métodos.

O campo de pesquisa que utiliza métodos numéricos para o estudo da mecânica dos fluidos é conhecida como mecânica dos fluidos computacional ou CFD (do inglês, Computational Fluid Dynamics). Dentro desse campo de estudo, os métodos mais utilizados na solução desses problemas são o MDF e o MEF ([WROBEL, 2002](#)).

Porém, o MEC também pode ser uma ferramenta valiosa na solução dos problemas da mecânica dos fluidos. [GONTIJO \(2016\)](#) utiliza o MEC para a simulação dos fenômenos de cones de água e de gás em reservatórios de petróleo horizontais e [CUNHA \(2016\)](#) simula o escoamento de gotas em canais convergentes utilizando também o MEC.

Nos dois casos citados, não há a presença do termo não-linear relativo à inércia do escoamento. Porém, há trabalhos utilizando o MEC que levam em consideração esse termo. Por exemplo, [SOUZA \(2005\)](#) investiga a solução de problemas de difusão-advecção via elementos de contorno; e [ŠKERGET; HRIBERŠEK; KUHN \(1999\)](#), [HRIBERŠEK; ŠKERGET \(1996\)](#) e [KITAGAWA \(2013\)](#) resolvem o sistema de equações acopladas composto pelas equações de Navier-Stokes e as equações da energia do escoamento a fim de estudar os fenômenos de difusão-convecção.

Entretanto, nos estudos citados acima, os autores recorrem à utilização da discretização do domínio para resolver as integrais de domínio relacionadas aos termos não lineares, perdendo assim uma das maiores vantagens do MEC que é redução de uma dimensão do seu problema.

Dessa forma, este trabalho propõe a solução das equações de Navier-Stokes utilizando o MEC, mas sem precisar discretizar o seu domínio. A ideia é utilizar o método da integração radial e interpolações via funções de base radial para converter as integrais de domínio em integrais de contorno equivalentes. Assim, não será necessária a discretização do domínio, mas sim a discretização do contorno e a geração de pontos internos sobre os quais o termo não linear será interpolado.

1.1 Organização do trabalho

O capítulo dois apresenta, de maneira concisa, a dedução das equações que regem o problema estudado, sendo elas as equações de Navier-Stokes e a equação da conservação de massa em um escoamento. Além disso, ele também descreve todo o procedimento matemático adotado para se chegar na equação diferencial final a ser resolvida a partir das hipóteses simplificadoras do problema, tais como: incompressibilidade, regime perma-

nente, a função penalidade para o campo de pressão e pequenas variações de altura. Por fim, esse capítulo descreve a analogia dessa equação final com a equação de Navier que descreve o comportamento de sólidos homogêneos e isotrópicos, permitindo assim utilizar toda a vasta literatura de elementos de contorno aplicados à mecânica dos sólidos para a solução do problema.

O capítulo três descreve, de forma bem detalhada, a dedução da formulação integral de contorno das equações diferenciais deduzidas no capítulo dois, bem como a dedução da formulação integral de contorno para as derivadas da velocidade, necessárias na interpolação do termo não linear. Não só isso, ele também apresenta todo o procedimento matemático necessário para a discretização de todas as integrais de contorno do problema, ressaltando e resolvendo as dificuldades impostas por singularidades encontradas em algumas das integrais devido às soluções fundamentais do problema. As integrais de domínio não são trabalhadas nesse capítulo.

O capítulo quatro fornece o embasamento teórico necessário para fazer a conversão das integrais de domínio para integrais de contorno equivalentes. Assim, ele apresenta a dedução do método da integração radial (MIR) tanto para o caso em que a função a ser integrada depende apenas de variáveis conhecidas, como para o caso em que a função depende de variáveis desconhecidas. Em seguida, as integrais de domínio do problema são discretizadas utilizando o MIR e as equações finais, discretizadas do problema são apresentadas. Por fim, esse capítulo apresenta o algoritmo utilizado na implementação numérica da solução.

O capítulo cinco apresenta a validação do código numérico bem como os resultados obtidos com a metodologia proposta. A validação será feita utilizando dois casos em que o termo convectivo é zero (escoamento entre duas placas planas gerado por um gradiente de pressão e gerado pelo movimento relativo de uma das placas). E o problema estudado é o escoamento em uma cavidade.

O capítulo seis apresenta as conclusões do trabalho e sugestões para pesquisas futuras.

2 Equações Governantes

Esse trabalho propõe uma solução para o escoamento de um fluido newtoniano e incompressível em regime permanente. Dessa forma, as equações governantes do problema são, basicamente, a equação da conservação de massa e as equações de Navier-Stokes (BATCHELOR, 2000).

Seguindo a linha de raciocínio descrita por BATCHELOR (2000), admite-se a hipótese de meio contínuo e aplica-se o princípio da conservação de massa a um volume V de fluido com uma área A , para obter:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_A \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (2.1)$$

em que ρ é a massa específica do fluido, \mathbf{n} é o vetor unitário normal à superfície de V e \mathbf{v} é o vetor velocidade dado por $\mathbf{v} = v_1 \hat{e}_1 + v_2 \hat{e}_2$, em que v_1 e v_2 são as componentes da velocidade nas direções 1 e 2 respectivamente. A Eq. (2.1) representa um balanço de massa dentro do volume V , ou seja, ela afirma que a taxa de variação da massa dentro do volume é igual ao fluxo líquido de massa entrando através das suas superfícies.

Aplicando o teorema da divergência à integral de área e passando a derivada em relação ao tempo para dentro da integral de volume, a Eq. (2.1) pode ser reescrita como:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV = 0. \quad (2.2)$$

Porém, a Eq. (2.2) é válida para todo e qualquer volume escolhido que esteja completamente submerso no fluido. A única maneira dessa afirmação ser verdadeira é se o integrando da equação for igual a 0 para todo o domínio. Dessa forma, chega-se à equação da conservação de massa dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.3)$$

Reescrevendo a Eq. (2.3):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0 \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\
\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0;
\end{aligned} \tag{2.4}$$

e utilizando do fato de que a massa específica é igual ao inverso do volume específico ($\rho = 1/v$), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\
\frac{D(1/v)}{Dt} + \frac{1}{v} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\
-\frac{1}{v^2} \frac{Dv}{Dt} + \frac{1}{v} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\
-\frac{1}{v} \frac{Dv}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\
\nabla \cdot \mathbf{v} &= \frac{1}{v} \frac{Dv}{Dt}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Mas, dado que a massa específica do fluido é constante (fluido incompressível), a derivada do volume específico em relação ao tempo é igual a zero. Disso, tem-se:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{2.6}$$

A Eq. (2.6) é a forma mais usual da equação da conservação de massa em um escoamento incompressível.

Já para a dedução das equações de Navier-Stokes, também conhecidas como equações do movimento para um fluido newtoniano, parte-se do princípio físico estipulado pela segunda lei de Newton.

Segundo [ARIS \(2012\)](#), tem-se que, para um elemento volumétrico de fluido, o princípio de conservação do momento linear afirma que a soma das forças de campo e as forças de superfície aplicadas a esse elemento é igual à taxa de variação do seu momento linear. Isso é traduzido matematicamente em

$$\int_V \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \rho dV = \mathbf{F}_{campo} + \mathbf{F}_s. \tag{2.7}$$

A parte à esquerda da igualdade da Eq. (2.7) representa a taxa de variação do momento linear do volume analisado, enquanto que \mathbf{F}_{campo} engloba as forças de campo e \mathbf{F}_s as forças de superfície.

É relativamente simples conceber a expressão para as forças de campo, sendo ela dada por:

$$\mathbf{F}_{campo} = \int_V \mathbf{f}_c \rho dV \quad (2.8)$$

sendo \mathbf{f}_c o vetor resultante de forças de campo por unidade de massa, podendo ser elas de qualquer natureza, como, por exemplo, forças gravitacionais, magnéticas e elétricas.

Já a expressão para as forças de superfície é obtida a partir do princípio da tensão de Cauchy que afirma que, em uma superfície fechada A , existe uma distribuição de vetor de tensão cuja a resultante e o momento são equivalentes às forças reais aplicadas pelo material fora do volume ao material dentro do volume analisado (SERRIN, 1959). Dessa forma, as forças de superfícies são dadas por:

$$\mathbf{F}_s = \int_A \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^T dV. \quad (2.9)$$

Substituindo as Eq. (2.8) e (2.9) na Eq. (2.7), tem-se que:

$$\int_V \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \rho dV = \int_V \mathbf{f}_c \rho dV + \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^T dV. \quad (2.10)$$

Através do mesmo raciocínio utilizado para chegar na equação da conservação de massa, a relação apresentada na Eq. (2.10) é válida para todo e qualquer volume V analisado e, disso, segue que:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} \rho = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^T + \mathbf{f}_c \rho. \quad (2.11)$$

A Eq. (2.11) é a equação geral do movimento para qualquer escoamento. As variáveis que mudam nessa equação, em função do escoamento analisado, são: a força de campo resultante por unidade de massa \mathbf{f}_c , que depende das forças de campo envolvidas, e o tipo de fluido analisado, matematicamente descrito pelo tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$. Para um fluido newtoniano, o tensor de tensões, em notação indicial, é dado por:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2\mu}{3} \Delta \delta_{ij} \quad (2.12)$$

em que Δ é a taxa de deformação volumétrica e é determinada da seguinte forma:

$$\Delta = \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (2.13)$$

Substituindo a Eq. (2.12) na Eq. (2.11), são obtidas as equações de Navier-Stokes:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2\mu}{3} \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} + \rho f_{ci}. \quad (2.14)$$

Porém, como o escoamento analisado nesse trabalho está em regime permanente e o fluido é considerado incompressível, a Eq. (2.14) pode ser simplificada para:

$$\rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \rho f_{ci}. \quad (2.15)$$

Além disso, devido às análises que serão feitas no presente trabalho, é conveniente utilizar o fato da massa específica do fluido ser contante em todo o domínio para reescrever a Eq. (2.15) utilizando a variável pressão modificada conforme apresentada por [BATCHELOR \(2000\)](#) e escrita da seguinte forma:

$$\tilde{P} = P_0 + \rho g_i x_i + P \quad (2.16)$$

em que \tilde{P} é a pressão modificada e P_0 é uma constante associada com a pressão atmosférica. Dessa forma, substituindo-se a Eq. (2.16) na Eq. (2.15), tem-se:

$$v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.17)$$

Para a adimensionalização da Eq. (2.17), utiliza-se os seguintes parâmetros adimensionais:

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad (2.18)$$

$$y^* = \frac{y}{L}, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{v}^* = \frac{\mathbf{v}}{v_0}, \quad (2.20)$$

$$\tilde{P}^* = \frac{\tilde{P}}{\rho v_0^2}, \quad (2.21)$$

$$t^* = \frac{t}{L/v_0}, \quad (2.22)$$

em que as variáveis com asterisco são as variáveis adimensionais, L é o comprimento característico do problema e v_0 é a velocidade do escoamento não perturbado. Assim, a equação adimensionalizada é:

$$v_j^* v_{i,j}^* = -\tilde{P}_{,i}^* + \frac{1}{Re} (v_{i,j}^* + v_{j,i}^*), \quad (2.23)$$

em que foi utilizada a notação $\partial a_i / \partial x_j = a_{i,j}$ para a notação de derivadas espaciais, em que a pode ser qualquer variável. A utilização do asterisco vai ser suprimida a partir daqui com o intuito de não carregar graficamente as expressões sem necessidade.

Para a modelagem do campo de pressão modificada do escoamento, é utilizada a técnica da função de penalidade (HUGHES; LIU; BROOKS, 1979). Isto é, o campo de pressão modificada é dado por:

$$\tilde{P} = -\lambda v_{i,i}, \quad (2.24)$$

onde λ é o parâmetro de penalidade. A convergência dessa técnica é provada por TEMAM (1984). Note que, para que a Eq. (2.24) satisfaça a Eq. (2.6), ou seja, a propriedade de incompressibilidade do fluido, o parâmetro de penalidade teria que tender ao infinito. Porém, como ele pode possuir um valor muito grande, mais ainda sim finito, a análise feita levará em consideração uma pequena compressibilidade para o fluido. KITAGAWA (2013) mostra que valores recomendados para λ são da ordem de 10^4 e 10^5 . Substituindo a Eq. (2.24) na Eq. (2.23), tem-se a seguinte equação diferencial final que vai ser resolvida nesse trabalho:

$$\begin{aligned} -(-\lambda v_{j,j})_{,i} + \frac{1}{Re} v_{i,jj} + \frac{1}{Re} v_{j,ij} &= v_j v_{i,j} \\ \lambda v_{j,ji} + \frac{1}{Re} v_{i,jj} + \frac{1}{Re} v_{j,ij} &= v_j v_{i,j} \\ \lambda v_{j,ij} + \frac{1}{Re} v_{i,jj} + \frac{1}{Re} v_{j,ij} &= v_j v_{i,j} \\ \left(\lambda + \frac{1}{Re} \right) v_{j,ij} + \frac{1}{Re} v_{i,jj} &= v_j v_{i,j}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Na análise estática da mecânica dos sólidos, o comportamento mecânico do corpo também pode ser descrito pela Eq. (2.11), porém as partículas não possuem aceleração em nenhum ponto do domínio, resultando na equação:

$$\sigma_{ij,j} = -b_i \quad (2.26)$$

em que b_i é a força de campo resultante por unidade de massa no caso da análise de mecânica dos sólidos. Aplicando as condições de homogeneidade e isotropia do material, o tensor de tensões é dado por (KANE, 1994):

$$\sigma_{ij} = \lambda' \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu' e_{ij} \quad (2.27)$$

onde λ' e μ' são as constantes de Lamé e e_{ij} é o tensor de deformação para pequenas deformações dado por:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.28)$$

em que u_i é o campo de deslocamento que descreve o formato final do sólido após a aplicação de cargas. Substituindo as Eq. (2.27) e (2.28) na Eq. (2.26), obtém-se as equações de Navier da elasticidade dadas por:

$$(\lambda' + \mu') u_{j,ij} + \mu' u_{i,jj} = -b_i. \quad (2.29)$$

Comparando as Eq. (2.25) e (2.29), nota-se que as partes da esquerda delas são similares. Assim, por analogia, é possível tratar o problema do escoamento como se fosse um problema elástico utilizando a equivalência de variáveis apresentada na tabela 2.0.1. Isso permite utilizar toda a vasta literatura do método de elementos de contorno aplicado a problemas elásticos na solução da equação (2.25).

Portanto, esse trabalho propõe a metodologia de simular o escoamento de um fluido incompressível e newtoniano em regime permanente através da solução de um problema elástico análogo com uma força de campo variável que depende dos deslocamentos e suas derivadas.

Tabela 2.0.1: Analogia entre problemas de análise de escoamentos e problemas elásticos.

Análise de Escoamentos	Análise de Problemas Elásticos
Velocidade: v_i	Deslocamento: u_i
Parâmetro de penalidade: λ	Constante de Lamé: λ'
Reynolds: $\frac{1}{Re}$	Constante de Lamé: μ'
Termo não linear: $-v_j v_{i,j}$	Forças de corpo: b_i

3 Método dos Elementos de Contorno (MEC)

3.1 Formulação Integral de Contorno

Nesta seção, será desenvolvida a equação integral de contorno para o problema elástico seguindo a dedução feita por KANE (1994). Para isso, inicia-se multiplicando a Eq. (2.26) por uma função peso w arbitrária e integrando sobre todo o domínio. O resultado dessa operação, como consequência direta da Eq. (2.26), é zero. Assim, tem-se:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) w d\Omega = 0, \quad (3.1)$$

em que Ω é o domínio analisado, cujo contorno é Γ . Além disso, é utilizada a notação $a_{,j}$ para a derivada parcial de a em relação à x_j , ou seja, $a_{,j} = \frac{\partial a}{\partial x_j}$.

Mas, como a função peso é arbitrária e a Eq. (2.26) representa três equações diferentes, escolhe-se três funções peso diferentes, uma para cada equação:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) w_i d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} w_i + b_i w_i) d\Omega = 0. \quad (3.2)$$

Como o primeiro termo do integrando envolve uma derivada, é possível utilizar a regra do produto para reescrever a Eq. (3.2).

$$\int_{\Omega} ((\sigma_{ij} w_i)_{,j} - \sigma_{ij} w_{i,j} + b_i w_i) d\Omega = 0. \quad (3.3)$$

Aplicando o teorema da divergência ao primeiro termo da integral da Eq. (3.3), ela é reescrita da seguinte forma:

$$\int_{\Gamma} (\sigma_{ij} w_i) n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} w_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} b_i w_i d\Omega = 0. \quad (3.4)$$

Utilizando o teorema de Cauchy, pode-se reescrever a integral de contorno em

termos dos componentes da tração na superfície.

$$\int_{\Gamma} t_i w_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i w_i d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} w_{i,j} d\Omega. \quad (3.5)$$

Reescrevendo $w_{i,j}$ em função das suas partes simétrica e antissimétrica, tem-se:

$$\begin{aligned} w_{i,j} &= \frac{1}{2}w_{i,j} + \frac{1}{2}w_{i,j} - \frac{1}{2}w_{j,i} + \frac{1}{2}w_{j,i}, \\ w_{i,j} &= \frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{j,i}) + \frac{1}{2}(w_{i,j} - w_{j,i}), \\ w_{i,j} &= s_{ij} + a_{ij}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

em que s_{ij} e a_{ij} são a parte simétrica e antissimétrica do gradiente da função peso, respectivamente. Mas, como o tensor de tensões é simétrico e a multiplicação de um tensor simétrico por um antissimétrico é nula, a Eq. (3.6) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\int_{\Gamma} t_i w_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i w_i d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{j,i}) d\Omega. \quad (3.7)$$

Como a Eq. (3.7) partiu da equação de Navier da elasticidade e foi resultado de apenas manipulação matemática via o teorema da divergência e o teorema de Cauchy, ela é válida pra descrever o comportamento mecânico de qualquer corpo em equilíbrio que esteja submetido às forças de superfície t_i e às forças de corpo b_i e que possua a distribuição de tensão σ_{ij} resultante, independentemente da função peso w_i escolhida. Mas, note que, se é escolhido um campo de deslocamento imaginário u_i para a função peso w_i , a Eq. (3.7) resulta em:

$$\int_{\Gamma} t_i u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} e_{ij} d\Omega, \quad (3.8)$$

em que a parte da esquerda da equação representa o trabalho realizado pelas tensões normais na superfície e as forças de campo atuantes no corpo enquanto ele sofre os deslocamentos u_i e a parte da direita é o trabalho realizado pelas tensões resultantes do equilíbrio durante esse mesmo deslocamento. A Eq. (3.8) é conhecida como o princípio do trabalho virtual e o deslocamento imaginário como deslocamentos virtuais (KANE, 1994).

Separando as variáveis da Eq. (3.8) em quantidades estáticas (forças de superfície, forças de corpo e tensões) e quantidades cinemáticas (deslocamentos e deformações), percebe-se que, no princípio do trabalho virtual, cada termo é um produto entre uma quantidade estática e uma cinemática. E, para que ele seja aplicado, basta que as quantidades estáticas sejam resultantes de um estado de equilíbrio de um corpo, independentemente dos deslocamentos virtuais.

Dessa forma, pode-se pensar num mesmo corpo com duas situações de cargas aplicadas distintas que resultam em dois estados de equilíbrio distintos, o estado 1 e 2. Aplicando o princípio do trabalho virtual ao estado 1 e definindo o deslocamento virtual como o deslocamento resultando do estado de equilíbrio 2, tem-se:

$$\int_{\Gamma} t_i^{(1)} u_i^{(2)} d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^{(1)} u_i^{(2)} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(1)} e_{ij}^{(2)} d\Omega. \quad (3.9)$$

Seguindo a mesma lógica, porém aplicando o princípio do trabalho virtual às quantidades estáticas do estado de equilíbrio 2 e assumindo os deslocamentos virtuais como sendo os deslocamentos obtidos do estado de equilíbrio 1, obtém-se:

$$\int_{\Gamma} t_i^{(2)} u_i^{(1)} d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^{(2)} u_i^{(1)} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(2)} e_{ij}^{(1)} d\Omega. \quad (3.10)$$

Entretanto, o tensor de tensões, para um material com um comportamento elástico linear, é definido a partir da equação:

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn} e_{mn} \quad (3.11)$$

em que C_{ijmn} é o tensor constitutivo e possui a propriedade de simetria e isotropia. A partir disso, é possível mostrar que:

$$\sigma_{ij}^{(1)} e_{ij}^{(2)} = C_{ijmn} e_{mn}^{(1)} e_{ij}^{(2)} = C_{ijmn} e_{ij}^{(2)} e_{mn}^{(1)} = C_{mnij} e_{ij}^{(2)} e_{mn}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)} e_{ij}^{(1)}. \quad (3.12)$$

E, utilizando a Eq. (3.12), é possível igualar as Eq. (3.9) e (3.10), resultando no teorema de reciprocidade dado por:

$$\int_{\Gamma} t_i^{(1)} u_i^{(2)} d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^{(1)} u_i^{(2)} d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^{(2)} u_i^{(1)} d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^{(2)} u_i^{(1)} d\Omega. \quad (3.13)$$

A importância da Eq. (3.13) consiste no fato de que ela relaciona os estados de equilíbrio de quaisquer duas configurações de carregamentos desde que o corpo analisado seja o mesmo.

Para chegar na equação integral de contorno do problema elástico, um dos carregamentos considerados na Eq. (3.13) vai ser o do problema de Kelvin para o caso bidimensional, cuja solução é conhecida como solução fundamental no método dos elementos de contorno, e o outro vai ser o carregamento cujas as variáveis deseja-se determinar.

O problema de Kelvin consiste na aplicação de uma carga pontual P em um meio infinito de material homogêneo, isotrópico e elástico e a análise da resposta a essa

solicitação. A sua formulação se dá pela equação de equilíbrio de um volume de controle esférico de raio ρ_{esf} onde a carga pontual é aplicada na direção i , ou seja:

$$\sum F_i = P + \int_{\Gamma} t_i d\Gamma = P + \int_{\Gamma} \sigma_{ji} n_j d\Gamma = P + \int_{\Gamma} \sigma_{ji} \frac{x_j}{\rho_{esf}} d\Gamma = 0. \quad (3.14)$$

Para a determinação da solução fundamental, a carga pontual é unitária e o problema pode ser resolvido utilizando o vetor de Galerkin, obtendo-se, como solução, as seguintes equações para os deslocamentos e as forças de superfícies respectivamente:

$$u_{kl} = \frac{1}{8\pi(1-\nu')\mu'} \left[(3-4\nu') \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{kl} + r_{,i} r_{,k} \right] \quad (3.15)$$

e

$$t_{kl} = \frac{-1}{4\pi(1-\nu')r} \left\{ (1-2\nu')(r_{,k} n_l - r_{,l} n_k) + r_{,i} n_i [(1-2\nu')\delta_{lk} + 2r_{,l} r_{,k}] \right\}, \quad (3.16)$$

em que u_{kl} e t_{kl} são, respectivamente, o deslocamento e a força de superfície resultante na direção k quando a força concentrada é aplicada na direção l ; ν' é o coeficiente de Poisson dado pela equação:

$$\nu' = \frac{\lambda'}{2(\lambda' + \mu')}, \quad (3.17)$$

r é a distância entre o ponto fonte d_i (onde a força concentrada é aplicada) e o ponto campo x_i (onde os deslocamentos e as forças de superfície são calculados) dada por:

$$r = \sqrt{(x_1 - d_1)^2 + (x_2 - d_2)^2} \quad (3.18)$$

e cujas derivadas espaciais são expressas pela equação:

$$r_{,i} = \frac{x_i - d_i}{r}. \quad (3.19)$$

É importante ressaltar a notação utilizada de tal forma que as variáveis u e t , quando acompanhadas de duas letras subscritas (u_{kl} e t_{kl}), representam as soluções fundamentais e, quando acompanhadas por apenas uma, representam a solução do problema em questão.

Para chegar na equação integral de contorno a partir da Eq. (3.13), será considerado o estado (1) de carregamento o problema que deve ser resolvido e o estado (2) o problema de Kelvin. Isso é possível, pois qualquer corpo sólido finito pode ser pensado

como um recorte do meio infinito do problema de Kelvin, cujas as condições de contorno são dadas pelas soluções fundamentais. Assim, tem-se:

$$\int_{\Gamma} t_l u_{kl} d\Gamma + \int_{\Omega} b_l u_{kl} d\Omega = \int_{\Gamma} t_{kl} u_l d\Gamma + \int_{\Omega} \delta_{kl}(x-d) u_k d\Omega, \quad (3.20)$$

em que $\delta_{kl}(x-d)$ é a função delta de Dirac que é a representação matemática da força concentrada aplicada no ponto d_j . Da Eq. (3.20), resulta-se na equação integral de contorno para o problema elástico:

$$c_{kl}(d) u_l(d) + \int_{\Gamma} t_{kl}(x, d) u_l(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{kl}(x, d) t_l(x) d\Gamma = \int_{\Omega} u_{kl}(x, d) b_l(x) d\Omega. \quad (3.21)$$

em que $c_{kl}(d)$ é um fator utilizado para diferenciar quando o ponto fonte está dentro, fora ou em cima do contorno e é definido da seguinte forma:

$$c_{kl}(\mathbf{d}) = \begin{cases} \delta_{kl}, & \text{se o ponto fonte } \mathbf{d} \text{ está dentro de } \Gamma \\ \frac{1}{2} \delta_{kl}, & \text{se o ponto fonte } \mathbf{d} \text{ está em uma parte suave de } \Gamma \\ 0, & \text{se o ponto fonte } \mathbf{d} \text{ está fora de } \Gamma. \end{cases} \quad (3.22)$$

3.2 Discretização da Equação Integral de Contorno

Nesta seção será mostrado como é feita a discretização da equação integral de contorno sem a integral de domínio. O tratamento que será dado a essa integral será detalhado na capítulo 4. Portanto, nessa seção, será considerado que a força de corpo é nula, ou seja, $b_i = 0$. Disso, reduz-se a Eq. (3.21) para:

$$c_{kl}(d) u_l(d) + \int_{\Gamma} t_{kl}(x, d) u_l(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{kl}(x, d) t_l(x) d\Gamma = 0. \quad (3.23)$$

Considerando o domínio do problema como o da Fig. 3.2.1, o contorno S real é aproximado pelo conjunto de elementos retilíneos por partes Γ , tal que $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_n$.

Assim, aproximando o contorno S pelo conjunto de elementos Γ , a Eq. (3.23) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$c_{kl}(d) u_l(d) + \underbrace{\sum_{E=1}^{NE} \int_{\Gamma_E} t_{kl}(x, d) u_l(x) d\Gamma}_1 - \underbrace{\sum_{E=1}^{NE} \int_{\Gamma_E} u_{kl}(x, d) t_l(x) d\Gamma}_2 = 0. \quad (3.24)$$

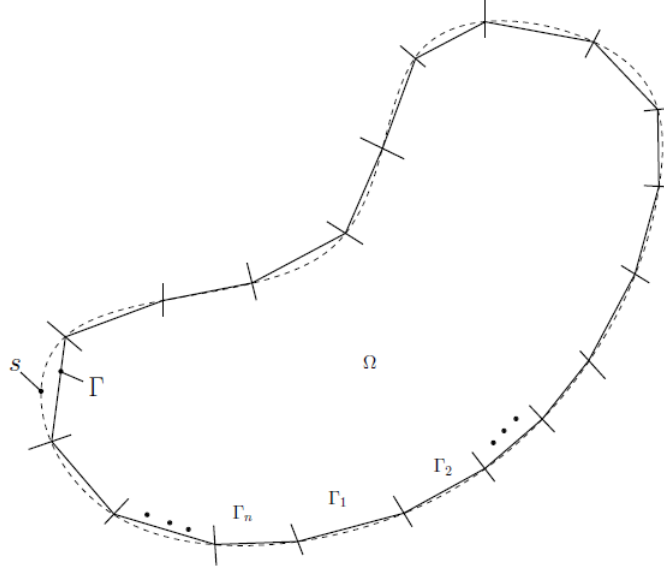


Figura 3.2.1: Contorno do problema discretizado. (ALBUQUERQUE, 2016)

Trabalhando primeiro o termo 1 da Eq. (3.24) e utilizando do fato de que, na formulação de elementos de contorno constantes, os deslocamentos e as forças de superfícies são considerados constantes ao longo de todo o elemento, tem-se:

$$\int_{\Gamma_E} t_{kl} u_l d\Gamma = \int_{\Gamma_E} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} d\Gamma = \int_{\Gamma_E} \mathbf{T} d\Gamma \mathbf{u}. \quad (3.25)$$

Quando o ponto fonte (ponto onde a força concentrada é aplicada) não pertence ao elemento sobre o qual é feita a integral, tem-se que a variável $r \neq 0$ e a integral da Eq. (3.25) não possui nenhuma singularidade, podendo ser avaliada, numericamente, pela quadratura de Gauss da seguinte forma:

$$\int_{\Gamma_E} \mathbf{T} d\Gamma = \int_{-1}^{+1} \mathbf{T} J d\xi = \sum_{i=1}^{npg} \mathbf{T} \Big|_{\xi_i} J \omega_i \quad (3.26)$$

em que npg é o número de pontos de Gauss utilizados na integração, ξ e ω são os pontos e os pesos de Gauss, respectivamente, e J é o jacobiano da transformação de coordenadas que, no caso de elementos constantes, é dado por:

$$J = \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} = \frac{L}{2} \quad (3.27)$$

onde L é o tamanho do elemento em que é feita a integração. Porém, quando o ponto fonte pertence ao elemento que está sendo integrado, a integral da Eq. (3.26) possui uma singularidade e ela deve ser considerada no sentido de Cauchy (KANWAL, 2013). Para tal, é necessário achar expressões para a distância r e suas derivadas em função de ξ . Em

elementos constantes, tem-se que a posição (x, y) pode ser expressa em função de ξ da seguinte forma:

$$x_k = \frac{1}{2}[(x_k^{(2)} - x_k^{(1)})\xi + (x_k^{(2)} + x_k^{(1)})] \quad (3.28)$$

em que x_k é a posição do ponto campo na direção k e $x_k^{(i)}$ é a posição do nó geométrico i do elemento, na direção k . E, como o ponto fonte sempre é aplicado ao nó físico do elemento, localizado no centro do mesmo, sua localização é dada por:

$$d_k = \frac{1}{2}(x_k^{(2)} + x_k^{(1)}). \quad (3.29)$$

Dessa forma, tem-se:

$$\begin{aligned} x_k - d_k &= \frac{1}{2}[(x_k^{(2)} - x_k^{(1)})\xi + (x_k^{(2)} + x_k^{(1)})] - \frac{1}{2}(x_k^{(2)} + x_k^{(1)}) \\ x_k - d_k &= \frac{1}{2}(x_k^{(2)} - x_k^{(1)})\xi. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Substituindo a Eq. (3.30) na Eq. (3.18), obtém-se:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\left[\frac{1}{2}(x^{(2)} - x^{(1)})\xi\right]^2 + \left[\frac{1}{2}(y^{(2)} - y^{(1)})\xi\right]^2} \\ r &= \frac{|\xi|}{2}\sqrt{(x^{(2)} - x^{(1)})^2 + (y^{(2)} - y^{(1)})^2} \\ r &= \frac{|\xi|L}{2}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

E, para determinar as derivadas espaciais de r , basta substituir as Eq. (3.30) e (3.31) na Eq. (3.19), resultando na Eq. (3.32):

$$\begin{aligned} r_{,k} &= \frac{1}{2}(x_k^{(2)} - x_k^{(1)})\xi \frac{2}{|\xi|L} \\ r_{,k} &= \frac{x_k^{(2)} - x_k^{(1)}}{L} \text{sinal}(\xi). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Analisando a expressão de t_{kl} dada pela Eq. (3.16) e utilizando dos fatos de que as derivadas espaciais de r possuem módulo constante e de que o vetor normal n_j é constante, conclui-se que t_{kl} pode ser reescrita da seguinte forma:

$$t_{kl} = \frac{f_{kl}}{r} \text{sinal}(\xi) = \frac{2f_{kl}}{|\xi|L} \text{sinal}(\xi) \quad (3.33)$$

em que f_{kl} engloba todo o resto da Eq. (3.16) que não contem r . Dessa forma, a integração singular pode ser realizada.

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_s} t_{kl} d\Gamma &= \int_{-1}^{+1} \frac{f_{kl}}{r} \text{sinal}(\xi) J d\xi \\
&= \int_{-1}^{+1} \frac{2f_{kl}}{|\xi|L} \text{sinal}(\xi) \frac{L}{2} d\xi \\
&= f_{kl} \int_{-1}^{+1} \frac{\text{sinal}(\xi)}{|\xi|} d\xi \\
&= f_{kl} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1}^{-\epsilon} \frac{\text{sinal}(\xi)}{|\xi|} d\xi + \int_{+\epsilon}^{+1} \frac{\text{sinal}(\xi)}{|\xi|} d\xi \right\} \\
&= f_{kl} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{-1}^{-\epsilon} \frac{d\xi}{-\xi} + \int_{+\epsilon}^{+1} \frac{d\xi}{\xi} \right\} \\
&= f_{kl} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln(-\xi) \Big|_{-1}^{-\epsilon} + \ln(\xi) \Big|_{\epsilon}^{+1} \right\} \\
&= f_{kl} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{ \ln \xi - \ln 1 + \ln 1 - \ln \xi \} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.34}$$

em que Γ_s é o elemento cuja integração possui uma singularidade. Portanto, quando o ponto fonte pertence ao elemento integrado, o resultado da integral da Eq. (3.25) é zero. Avaliando agora o termo 2 da Eq. (3.24):

$$\int_{\Gamma_E} u_{kl} t_l d\Gamma = \int_{\Gamma_E} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} d\Gamma = \int_{\Gamma_E} \mathbf{U} d\Gamma \mathbf{t}. \tag{3.35}$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio, caso o elemento integrado não seja o mesmo elemento onde o ponto fonte está sendo aplicado, é possível realizar a integração numericamente através da quadratura de Gauss.

$$\int_{\Gamma_E} \mathbf{U} d\Gamma = \int_{-1}^{+1} \mathbf{U} J d\xi = \sum_{i=1}^{npg} \mathbf{U} \Big|_{\xi_i} J \omega_i \tag{3.36}$$

Porém, se esse não for o caso, é necessário contornar o problema da singularidade na integral da Eq. (3.35). Integrando, primeiramente u_{11} , tem-se:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_s} u_{11} d\Gamma &= \int_{\Gamma_s} \underbrace{\frac{1}{8\pi(1-\nu')\mu'}}_{K_1} \left[\overbrace{(3-4\nu')}^{K_2} \ln\left(\frac{1}{r}\right) + r_{,1}^2 \right] d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma_s} \frac{1}{K_1} [-K_2 \ln(r) + r_{,1}^2] d\Gamma \\
&= \int_{-1}^{+1} \frac{1}{K_1} [-K_2 \ln(r) + r_{,1}^2] J d\xi \\
&= \frac{J}{K_1} \left[\underbrace{\int_{-1}^{+1} -K_2 \ln(r) d\xi}_{I_1} + \underbrace{\int_{-1}^{+1} r_{,1}^2 d\xi}_{I_2} \right].
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Resolvendo primeiro I_1 utilizando a Eq. (3.31):

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-1}^{+1} -K_2 \ln(r) d\xi \\
&= -2K_2 \int_0^{+1} \ln\left(\frac{|\xi|L}{2}\right) d\xi \\
&= -2K_2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{+\epsilon}^{+1} \ln\left(\frac{\xi L}{2}\right) d\xi \right\} \\
&= -2K_2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \left[\xi \ln\left(\frac{\xi L}{2}\right) - \xi \right]_{\epsilon}^1 \right\} \\
&= -2K_2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln\left(\frac{L}{2}\right) - 1 - \left(\epsilon \ln\left(\frac{\epsilon L}{2}\right) - \epsilon \right) \right\} \\
&= -2K_2 \left[\ln\left(\frac{L}{2}\right) - 1 - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \epsilon \ln\left(\frac{\epsilon L}{2}\right) \right\} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{\epsilon\} \right] \\
&= -2K_2 \left[\ln\left(\frac{L}{2}\right) - 1 - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln\left(\frac{\epsilon L}{2}\right)}{1/\epsilon} \right\} \right] \\
&= -2K_2 \left[\ln\left(\frac{L}{2}\right) - 1 \right].
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Resolvendo I_2 agora, utilizando a Eq. (3.32):

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-1}^{+1} r_{,1}^2 d\xi \\
&= \int_{-1}^{+1} \left(\frac{x^{(2)} - x^{(1)}}{L} \text{sinal}(\xi) \right)^2 d\xi \\
&= \int_{-1}^{+1} \frac{\Delta x^2}{L^2} d\xi \\
&= \frac{2\Delta x^2}{L^2}.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Dessa forma, conclui-se que:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_s} u_{11} d\Gamma &= \frac{J}{K_1} \left\{ -2K_2 \left[\ln\left(\frac{L}{2}\right) - 1 \right] + \frac{2\Delta x^2}{L^2} \right\} \\
&= \frac{L}{8\pi(1-\nu')\mu} \left[(3-4\nu') \left(\ln\left(\frac{L}{2}\right) - 1 \right) + \left(\frac{\Delta x}{L} \right)^2 \right].
\end{aligned} \tag{3.40}$$

De forma análoga, na integração da solução fundamental u_{22} , tem-se:

$$\int_{\Gamma_s} u_{22} d\Gamma = \frac{L}{8\pi(1-\nu')\mu} \left[(3-4\nu') \left(\ln\left(\frac{L}{2}\right) - 1 \right) + \left(\frac{\Delta y}{L} \right)^2 \right]. \tag{3.41}$$

Agora, falta apenas resolver a integral dos termos u_{12} e u_{21} . Para a solução fundamental u_{12} , segue:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_s} u_{12} d\Gamma &= \int_{\Gamma_s} \frac{1}{K_1} r_{,1} r_{,2} d\Gamma \\
&= \frac{1}{K_1} \int_{-1}^{+1} r_{,1} r_{,2} J d\xi \\
&= \frac{1}{K_1} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{x^{(2)} - x^{(1)}}{L} \text{sin}(\xi) \right) \left(\frac{y^{(2)} - y^{(1)}}{L} \text{sin}(\xi) \right) J d\xi \\
&= \frac{1}{K_1} \int_{-1}^{+1} \frac{\Delta x \Delta y}{L^2} \frac{L}{2} d\xi \\
&= \frac{1}{K_1} \frac{2 \Delta x \Delta y}{L^2} \frac{L}{2} \\
&= \frac{1}{8\pi(1 - \nu')\mu'} \frac{\Delta x \Delta y}{L}.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Mas, como $u_{12} = u_{21}$, a integral do termo u_{21} é:

$$\int_{\Gamma_s} u_{21} d\Gamma = \frac{1}{8\pi(1 - \nu')\mu'} \frac{\Delta x \Delta y}{L}. \tag{3.43}$$

Dessa forma, fixando o ponto fonte e realizando a discretização da Eq. (3.24), tem-se:

$$\frac{1}{2} \mathbf{I} \mathbf{u}(\mathbf{d}) + \sum_{E=1}^{NE} \mathbf{R}^{(E)} \mathbf{u}^{(E)} - \sum_{E=1}^{NE} \mathbf{S}^{(E)} \mathbf{t}^{(E)} = 0. \tag{3.44}$$

em que \mathbf{I} é a matriz identidade de dimensão 2, $\mathbf{u}^{(E)}$ e $\mathbf{t}^{(E)}$ são os vetores com os deslocamentos e as forças de superfície, respectivamente, do nó físico do elemento e as matrizes $\mathbf{R}^{(E)}$ e $\mathbf{S}^{(E)}$ são dadas por:

$$\mathbf{R}^{(E)} = \int_{\Gamma_E} \mathbf{T} d\Gamma \tag{3.45}$$

e

$$\mathbf{S}^{(E)} = \int_{\Gamma_E} \mathbf{U} d\Gamma. \tag{3.46}$$

Aplicando o ponto fonte em todos os NE nós físicos do problema, é possível montar o seguinte sistema de $2NE$ variáveis com $2NE$ equações:

$$\mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{G} \mathbf{t} \tag{3.47}$$

em que \mathbf{u} e \mathbf{t} são os vetores com todos os deslocamentos e forças de superfície de todos os elementos respectivamente e as matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} são dadas por:

$$\mathbf{H}^{(d,E)} = \begin{cases} \int_{\Gamma_E} \mathbf{T} d\Gamma + \frac{1}{2} \mathbf{I}, & \text{se o ponto fonte pertencer ao elemento} \\ \int_{\Gamma_E} \mathbf{T} d\Gamma, & \text{se o ponto fonte não pertencer ao elemento} \end{cases} \tag{3.48}$$

e

$$\mathbf{G}^{(d,E)} = \int_{\Gamma_E} \mathbf{U} d\Gamma. \quad (3.49)$$

Como, devido às condições de contorno do problema, sempre é conhecido ou o deslocamento ou a força de superfícies de cada ponto em cada direção, a Eq.(3.47) pode ser resolvida a fim de se determinar as variáveis desconhecidas do problema. Assim, aplicando as condições de contorno do problema, tem-se, a partir da Eq. (3.47) o seguinte sistema de equações linear:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (3.50)$$

3.3 Formulação Integral de Contorno para a Determinação das Derivadas de u

Para o correto cálculo das pseudo-forças de corpo, é necessário avaliar as derivadas espaciais de u , uma vez que elas são dadas por:

$$b_i = -v_j v_{i,j}. \quad (3.51)$$

A equação integral de contorno para a determinação das derivadas espaciais pode ser facilmente obtida derivando a Eq.(3.21) em relação ao ponto fonte da seguinte forma:

$$\frac{\partial[c_{kl}(d)u_l(d)]}{\partial d_m} + \frac{\partial}{\partial d_m} \int_{\Gamma} t_{kl}(x, d)u_l(x)d\Gamma - \frac{\partial}{\partial d_m} \int_{\Gamma} u_{kl}(x, d)t_l(x)d\Gamma = \frac{\partial}{\partial d_m} \int_{\Omega} u_{kl}(x, d)b_l(x)d\Omega \quad (3.52)$$

mas, como as únicas variáveis que dependem da posição do ponto fonte são as soluções fundamentais e o deslocamento resultante da integração do delta de Dirac da Eq. (3.20), tem-se:

$$c_{kl} \frac{\partial u_l}{\partial d_m} + \int_{\Gamma} \frac{\partial t_{kl}}{\partial d_m} u_l d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{kl}}{\partial d_m} t_l d\Gamma = \int_{\Omega} \frac{\partial u_{kl}}{\partial d_m} b_l d\Omega. \quad (3.53)$$

Porém, devido à natureza das soluções fundamentais e à seguinte relação:

$$\frac{\partial r}{\partial d_m} = -\frac{\partial r}{\partial x_m} \quad (3.54)$$

tem-se:

$$c_{kl} u_{l,m} - \int_{\Gamma} t_{kl,m} u_l d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{kl,m} t_l d\Gamma = - \int_{\Omega} u_{kl,m} b_l d\Omega \quad (3.55)$$

em que as derivadas espaciais das soluções fundamentais são dadas por (KANE, 1994):

$$u_{kl,m} = \frac{\partial u_{kl}}{\partial x_m} = \frac{1}{8\mu'\pi(1-\nu')r} [-2r_{,k}r_{,l}r_{,m} - (3-4\nu')\delta_{kl}r_{,m} + \delta_{km}r_{,l} + \delta_{lm}r_{,k}] \quad (3.56)$$

e

$$\begin{aligned} t_{kl,m} = \frac{\partial t_{kl}}{\partial x_m} = & \frac{-1}{4\pi(1-\nu')r^2} \{ 2r_{,k}n_k [-(1-2\nu')r_{,m}\delta_{kl} - 4r_{,k}r_{,l}r_{,m} + r_{,l}\delta_{km} + r_{,k}\delta_{lm}] \\ & + 2(1-2\nu')[r_{,l}r_{,m}n_k - r_{,k}r_{,l}n_m] + 2r_{,k}r_{,l}n_m \\ & + (1-2\nu')[\delta_{kl}n_m + \delta_{km}n_l - \delta_{lm}n_k] \}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Assim, as derivadas espaciais do deslocamento são dadas pela equação:

$$c_{kl}u_{l,m} = \int_{\Gamma} t_{kl,m}u_l d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{kl,m}t_l d\Gamma - \int_{\Omega} u_{kl,m}b_l d\Omega. \quad (3.58)$$

3.4 Discretização da Equação Integral de Contorno das Derivadas de u

Assim como na seção 3.2, essa seção mostrará como a equação integral de contorno utilizada para a determinação das derivadas $u_{i,m}$ pode ser discretizada, desconsiderando a integral de domínio, ou seja, $b_l = 0$. A discretização da integral de domínio será detalhada no capítulo 4 deste trabalho. Dessa forma, a Eq. (3.58) é simplificada para:

$$c_{kl}u_{l,m} = \int_{\Gamma} t_{kl,m}u_l d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{kl,m}t_l d\Gamma. \quad (3.59)$$

Aproximando o contorno real S pelo conjunto de elementos constante Γ mostrados na Fig. (3.2.1), tem-se:

$$c_{kl}u_{l,m} = \sum_{E=1}^{NE} \underbrace{\int_{\Gamma_E} t_{kl,m}u_l d\Gamma}_1 - \sum_{E=1}^{NE} \underbrace{\int_{\Gamma_E} u_{kl,m}t_l d\Gamma}_2. \quad (3.60)$$

Seguindo os mesmos passos da seção 3.2, será trabalhado o termo 1 da Eq. (3.60) e depois o termo 2, dando o devido tratamento para as singularidades quando presentes. Assim:

$$\int_{\Gamma_E} t_{kl,m}u_l d\Gamma = \int_{\Gamma_E} \begin{bmatrix} t_{11,m} & t_{12,m} \\ t_{21,m} & t_{22,m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} d\Gamma = \int_{\Gamma_E} \mathbf{T}_{,m} d\Gamma \mathbf{u}. \quad (3.61)$$

Assim como na integração da solução fundamental t_{kl} , quando o ponto fonte não pertence ao elemento integrado, não há problema de singularidades, sendo possível realizar a integral numericamente, pelo método da quadratura de Gauss.

$$\int_{\Gamma_E} \mathbf{T}_{,m} d\Gamma = \int_{-1}^{+1} \mathbf{T}_{,m} J d\xi = \sum_{i=1}^{npg} \mathbf{T}_{,m} \Big|_{\xi_i} J \omega_i \quad (3.62)$$

Mas, quando o ponto fonte pertence ao elemento, existe uma singularidade na integral do tipo $1/r^2$ e, por isso, ela deve ser considerada no sentido de Hadamard (ANG, 2014). Seguindo o mesmo raciocínio utilizado para chegar na Eq. (3.33), tem-se:

$$t_{kl,m} = \frac{f_{klm}}{r^2} = \frac{4f_{klm}}{\xi^2 L^2} \quad (3.63)$$

em que f_{klm} é uma constante ao longo de todo o elemento. E, assim, a integral da Eq. (3.62) é resolvida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_s} \mathbf{T}_{,m} d\Gamma &= \int_{-1}^{+1} \mathbf{T}_{,m} J d\xi \\ &= \int_{-1}^{+1} \frac{4f_{klm}}{\xi^2 L^2} J d\xi \\ &= \frac{4f_{klm}}{L^2} J \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\xi^2} \\ &= \frac{4f_{klm}}{L^2} \frac{L}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\xi^2} \\ &= \frac{2f_{klm}}{L} 2 \int_0^{+1} \frac{d\xi}{\xi^2} \\ &= \frac{4f_{klm}}{L} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{+\epsilon}^{+1} \frac{d\xi}{\xi^2} \right\} \\ &= \frac{4f_{klm}}{L} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \left[-\frac{1}{\xi} \right]_{\epsilon}^{+1} \right\} \\ &= \frac{4f_{klm}}{L} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\epsilon} - 1 \right] \end{aligned} \quad (3.64)$$

porém, como a integral é no sentido de Hadamard, tem-se:

$$\int_{\Gamma_s} \mathbf{T}_{,m} d\Gamma = \text{parte finita} \left\{ \frac{4f_{klm}}{L} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\epsilon} - 1 \right] \right\} = \frac{-4f_{klm}}{L}. \quad (3.65)$$

Na análise do termo 2, segue-se o mesmo passo a passo. Primeiro, resolve-se o caso em que o ponto fonte não pertence ao elemento através da quadratura de Gauss, obtendo-se:

$$\int_{\Gamma_E} \mathbf{U}_{,m} d\Gamma = \int_{-1}^{+1} \mathbf{U}_{,m} J d\xi = \sum_{i=1}^{npg} \mathbf{U}_{,m} \Big|_{\xi_i} J \omega_i. \quad (3.66)$$

Em seguida, trata-se o caso em que o ponto fonte pertence ao elemento. Nesse caso, a integração possui uma singularidade do tipo $1/r$ e ela também deve ser considerada no sentido de Cauchy (KANWAL, 2013). Reescrevendo a Eq. (3.56), tem-se:

$$u_{kl,m} = \frac{g_{klm}}{r} \text{ sinal}(\xi) = \frac{2g_{klm}}{|\xi|L} \text{ sinal}(\xi) \quad (3.67)$$

em que g_{klm} é uma constante ao longo de todo o elemento. Dessa forma, a integral do termo 2 da Eq. (3.60) é dada por:

$$\int_{\Gamma_s} \mathbf{U}_{,m} d\Gamma = \int_{-1}^{+1} \frac{2g_{kl}}{|\xi|L} \text{ sinal}(\xi) J d\xi. \quad (3.68)$$

Note que a Eq. (3.68) é similar à Eq. (3.34) e, de forma análoga, tem-se que o resultado da integral é:

$$\int_{\Gamma_s} \mathbf{U}_{,m} d\Gamma = 0. \quad (3.69)$$

Dessa forma, as derivadas espaciais u_l serão dadas por:

$$\mathbf{C} \mathbf{u}_{,m} = \mathbf{P}_m \mathbf{u} - \mathbf{O}_m \mathbf{t} \quad (3.70)$$

em que \mathbf{C} , \mathbf{P}_m e \mathbf{O}_m são dados, respectivamente, por:

$$C_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \text{ e o ponto fonte } d \text{ está dentro de } \Gamma \\ \frac{1}{2}, & \text{se } i = j \text{ e o ponto fonte } d \text{ está em uma parte suave de } \Gamma \\ 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases} \quad (3.71)$$

$$\mathbf{P}_m^{(d,E)} = \int_{\Gamma_E} \mathbf{U}_{,m} d\Gamma \quad (3.72)$$

e

$$\mathbf{O}_m^{(d,E)} = \int_{\Gamma_E} \mathbf{T}_{,m} d\Gamma. \quad (3.73)$$

4 Tratamento das Integrais de Domínio

4.1 Método da Integração Radial (MIR)

Uma forma de se transformar uma integral de domínio em uma integral de contorno é através do método de integração radial (MIR) (GAO, 2002). Com isso, não é necessário discretizar o domínio, mas apenas o contorno. A demonstração a seguir seguirá os passos apresentados por ALBUQUERQUE (2016).

Considere a seguinte integral sobre o domínio Ω :

$$I = \int_{\Omega} g(x, y) d\Omega \quad (4.1)$$

em que $g(x, y)$ é uma função qualquer que depende da posição (x, y) . Fazendo uma transformação de coordenadas cartesianas para coordenadas cilíndricas, tem-se:

$$I = \int_{\theta} \int_0^r g(x(\theta, \rho), y(\theta, \rho)) \rho d\rho d\theta \quad (4.2)$$

em que r é o valor de ρ em um ponto do contorno Γ do domínio Ω . Definindo F como:

$$F(\theta) = \int_0^r g(x(\theta, \rho), y(\theta, \rho)) \rho d\rho, \quad (4.3)$$

a integral I pode ser reescrita como:

$$I = \int_{\theta} F(\theta) d\theta. \quad (4.4)$$

Desta forma, basta modificar a integral I para que ela seja realizada em função de Γ em vez de θ . Para isso, é necessário desenvolver uma relação geométrica entre essas duas variáveis.

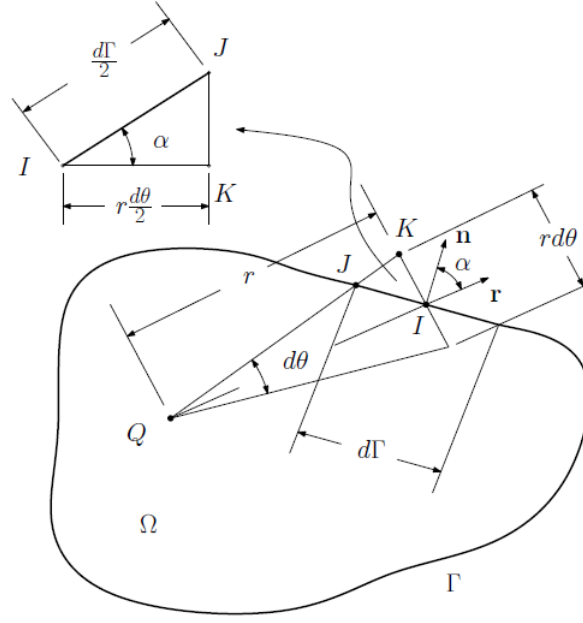


Figura 4.1.1: Visualização das variáveis geométricas do problema. (ALBUQUERQUE, 2016)

Considerando um ângulo infinitesimal $d\theta$ e analisando a Fig. 4.1.1, segue que:

$$\cos(\alpha) = \frac{r \frac{d\theta}{2}}{\frac{d\Gamma}{2}}, \quad (4.5)$$

ou melhor:

$$d\theta = \frac{\cos(\alpha)}{r} d\Gamma. \quad (4.6)$$

Mas, como α é o ângulo formado entre os vetores unitários na direção normal e radial, tem-se que:

$$\cos(\alpha) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} \quad (4.7)$$

em que \mathbf{n} e \mathbf{r} são os vetores unitários na direção normal e radial respectivamente. Assim, substituindo as Eq. (4.6) e (4.7) na Eq. (4.4), tem-se como resultado:

$$I = \int_{\Gamma} F \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma. \quad (4.8)$$

Note que, caso a função $g(x, y)$ dependa apenas de variáveis conhecidas, a integral de domínio pode ser avaliada e resultados consistentes são obtidos. Exemplos de casos assim são: problemas elásticos com força gravitacional e/ou centrífuga e problemas de transferência de calor com fontes de calor.

Porém, se a função $g(x, y)$ depender de variáveis desconhecidas, como é o caso desse trabalho, apenas a Eq. (4.8) não é o bastante para resolver o problema. A seguir, será apresentado uma outra versão do método que resolve esse problema.

Aproximando a função que depende de variáveis desconhecidas g como uma soma de M produtos de funções de base radial f^m e coeficientes a se determinar γ^m , ou seja:

$$g \approx \sum_{m=1}^M \gamma^m f^m, \quad (4.9)$$

tem-se:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Omega} g d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \gamma^m f^m d\Omega \\ &= \sum_{j=1}^M \gamma^m \int_{\theta} \int_0^r f^m \rho d\rho d\theta. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Fazendo:

$$F^m = \int_0^r f^m \rho d\rho \quad (4.11)$$

e aplicando a Eq. (4.8), obtém-se:

$$I = \sum_{j=1}^M \gamma^m \int_{\Gamma} F^m \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma, \quad (4.12)$$

ou melhor:

$$I = \left[\int_{\Gamma} F^1 \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma \quad \int_{\Gamma} F^2 \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma \quad \dots \quad \int_{\Gamma} F^M \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma \right] \left\{ \begin{array}{c} \gamma^1 \\ \gamma^2 \\ \vdots \\ \gamma^M \end{array} \right\}. \quad (4.13)$$

Para se determinar os coeficientes γ^m , é necessário fazer uma estimativa das variáveis desconhecidas a fim de se montar o seguinte sistema de equações:

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_M \end{array} \right\}}_g = \underbrace{\left[\begin{array}{cccc} f^1 & f^2 & \dots & f^M \\ f^1 & f^2 & \dots & f^M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^1 & f^2 & \dots & f^M \end{array} \right]}_{\phi} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \gamma^1 \\ \gamma^2 \\ \vdots \\ \gamma^M \end{array} \right\}}_{\gamma}. \quad (4.14)$$

Dessa forma, os coeficientes γ^m são determinados pela equação:

$$\gamma = \phi^{-1} \mathbf{g}, \quad (4.15)$$

e a integral I pela equação:

$$I = \left[\int_{\Gamma} F^1 \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma \quad \int_{\Gamma} F^2 \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma \quad \dots \quad \int_{\Gamma} F^M \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma \right] \phi^{-1} \mathbf{g}. \quad (4.16)$$

4.2 Discretização das Integrais de Domínio

Primeiramente, será feita a discretização da integral de domínio da Eq. (3.21) para um ponto fonte fixo, ou seja:

$$I_k(d) = \int_{\Omega} u_{kl} b_l d\Omega. \quad (4.17)$$

Aproximando as forças de corpo b_1 e b_2 por:

$$b_1 \approx \sum_{j=1}^{NI} \gamma_j^{(1)} f_j \quad (4.18)$$

e

$$b_2 \approx \sum_{j=1}^{NI} \gamma_j^{(2)} f_j \quad (4.19)$$

em que NI é o número de pontos utilizados para fazer a interpolação das forças de campo, que neste trabalho será igual ao número de nós físicos do contorno mais o número de pontos internos em que a função de base radial utilizada é:

$$f_j = 1 - r' \quad (4.20)$$

em que r' é a distância entre o ponto campo e o centro da função de base radial j . Assim, tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}(\mathbf{d}) &= \int_{\Omega} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^{NI} \gamma_j^{(1)} f_j \\ \sum_{j=1}^{NI} \gamma_j^{(2)} f_j \end{Bmatrix} d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} u_{11} \sum_{j=1}^{NI} \gamma_j^{(1)} f_j + u_{12} \sum_{j=1}^{NI} \gamma_j^{(2)} f_j \\ u_{21} \sum_{j=1}^{NI} \gamma_j^{(1)} f_j + u_{22} \sum_{j=1}^{NI} \gamma_j^{(2)} f_j \end{Bmatrix} d\Omega \\
&= \sum_{j=1}^{NI} \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} u_{11} \gamma_j^{(1)} f_j + u_{12} \gamma_j^{(2)} f_j \\ u_{21} \gamma_j^{(1)} f_j + u_{22} \gamma_j^{(2)} f_j \end{Bmatrix} d\Omega \\
&= \sum_{j=1}^{NI} \int_{\Omega} f_j \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_j^{(1)} \\ \gamma_j^{(2)} \end{Bmatrix} d\Omega.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Reescrevendo a Eq. (4.21):

$$\mathbf{I}(\mathbf{d}) = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} f_1 \mathbf{U} d\Omega & \int_{\Omega} f_2 \mathbf{U} d\Omega & \cdots & \int_{\Omega} f_{NI} \mathbf{U} d\Omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_1^{(1)} \\ \gamma_1^{(2)} \\ \gamma_2^{(1)} \\ \gamma_2^{(2)} \\ \vdots \\ \gamma_{NI}^{(1)} \\ \gamma_{NI}^{(2)} \end{Bmatrix}. \tag{4.22}$$

Aplicando o ponto fonte em cada um dos NI pontos, tem-se:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \mathbf{I}(\mathbf{d}_1) \\ \mathbf{I}(\mathbf{d}_2) \\ \vdots \\ \mathbf{I}(\mathbf{d}_{NI}) \end{Bmatrix}}_I = \underbrace{\begin{bmatrix} \int_{\Omega} f_1 \mathbf{U}(\mathbf{d}_1) d\Omega & \int_{\Omega} f_2 \mathbf{U}(\mathbf{d}_1) d\Omega & \cdots & \int_{\Omega} f_{NI} \mathbf{U}(\mathbf{d}_1) d\Omega \\ \int_{\Omega} f_1 \mathbf{U}(\mathbf{d}_2) d\Omega & \int_{\Omega} f_2 \mathbf{U}(\mathbf{d}_2) d\Omega & \cdots & \int_{\Omega} f_{NI} \mathbf{U}(\mathbf{d}_2) d\Omega \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\Omega} f_1 \mathbf{U}(\mathbf{d}_{NI}) d\Omega & \int_{\Omega} f_2 \mathbf{U}(\mathbf{d}_{NI}) d\Omega & \cdots & \int_{\Omega} f_{NI} \mathbf{U}(\mathbf{d}_{NI}) d\Omega \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{Bmatrix} \gamma_1^{(1)} \\ \gamma_1^{(2)} \\ \gamma_2^{(1)} \\ \gamma_2^{(2)} \\ \vdots \\ \gamma_{NI}^{(1)} \\ \gamma_{NI}^{(2)} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\gamma}} \tag{4.23}$$

ou

$$\mathbf{I} = \mathbf{M} \boldsymbol{\gamma} \tag{4.24}$$

Utilizando o mesmo raciocínio utilizado para deduzir a Eq. (4.15), tem-se que:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} b_1(\mathbf{x}_1) \\ b_2(\mathbf{x}_1) \\ b_1(\mathbf{x}_2) \\ b_2(\mathbf{x}_2) \\ \vdots \\ b_1(\mathbf{x}_{NI}) \\ b_2(\mathbf{x}_{NI}) \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}_{campo}} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 & 0 & f_2 & 0 & \cdots & f_{NI} & 0 \\ 0 & f_1 & 0 & f_2 & 0 & \cdots & f_{NI} \\ f_1 & 0 & f_2 & 0 & \cdots & f_{NI} & 0 \\ 0 & f_1 & 0 & f_2 & 0 & \cdots & f_{NI} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ f_1 & 0 & f_2 & 0 & \cdots & f_{NI} & 0 \\ 0 & f_1 & 0 & f_2 & 0 & \cdots & f_{NI} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\phi}} \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_1^{(1)} \\ \gamma_1^{(2)} \\ \gamma_2^{(1)} \\ \gamma_2^{(2)} \\ \vdots \\ \gamma_{NI}^{(1)} \\ \gamma_{NI}^{(2)} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\gamma}} \quad (4.25)$$

e que o vetor $\boldsymbol{\gamma}$ é dado por:

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\phi}^{-1} \mathbf{b}_{campo}. \quad (4.26)$$

Aplicando o MIR às integrais de domínio da Eq. (4.23), tem-se que a matriz \mathbf{M} é:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma} \mathbf{F}_1(\mathbf{d}_1) \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma & \int_{\Gamma} \mathbf{F}_2(\mathbf{d}_1) \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma} \mathbf{F}_{NI}(\mathbf{d}_1) \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \mathbf{F}_1(\mathbf{d}_2) \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma & \int_{\Gamma} \mathbf{F}_2(\mathbf{d}_2) \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma} \mathbf{F}_{NI}(\mathbf{d}_2) \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\Gamma} \mathbf{F}_1(\mathbf{d}_{NI}) \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma & \int_{\Gamma} \mathbf{F}_2(\mathbf{d}_{NI}) \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma} \mathbf{F}_{NI}(\mathbf{d}_{NI}) \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

em que \mathbf{F}_j é dado por:

$$\mathbf{F}_j = \int_0^r f_j \mathbf{U} \rho d\rho. \quad (4.28)$$

Discretizando o contorno do problema, tem-se que as integrais da matriz \mathbf{M} são dadas por:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F}_j \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma = \sum_{E=1}^{NE} \int_{\Gamma_E} \mathbf{F}_j \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma \quad (4.29)$$

em que as integrais sobre cada elemento do contorno podem ser calculadas numericamente através da quadratura de Gauss, ou seja:

$$\int_{\Gamma_E} \mathbf{F}_j \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma = \int_{-1}^{+1} \mathbf{F}_j \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} J d\xi = \sum_{i=1}^{npg} \mathbf{F}_j \Big|_{\xi_i} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} \Big|_{\xi_i} J \omega_i. \quad (4.30)$$

E, de forma semelhante, é possível resolver a integral da Eq. (4.28).

$$\mathbf{F}_j = \int_0^r f_j \mathbf{U} \rho d\rho = \int_{-1}^{+1} f_j \mathbf{U} \rho \frac{d\rho}{d\xi} d\xi = \sum_{i=1}^{npg} f_j \Big|_{\xi_i} \mathbf{U} \Big|_{\xi_i} \rho_{\xi_i} \frac{d\rho}{d\xi} \omega_i \quad (4.31)$$

em que o jacobiano $\frac{d\rho}{d\xi}$ é dado por:

$$\frac{d\rho}{d\xi} = \frac{r}{2}. \quad (4.32)$$

É importante ressaltar que, devido à transformação de coordenadas cartesianas para polares e a posição da origem do sistema de coordenadas, singularidades fracas são anuladas pelo MIR. Portanto, não há problemas de singularidade em nenhuma dessas integrais.

Dessa forma, a Eq. (3.21) discretizada possui a seguinte forma:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{t} + \mathbf{M}\boldsymbol{\gamma}, \quad (4.33)$$

e, aplicando as condições de contorno do problema, tem-se:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{M}\boldsymbol{\gamma}. \quad (4.34)$$

Agora, de forma análoga, será mostrado como avaliar numericamente a integral de domínio da Eq. (3.58) para um ponto fonte fixo, ou seja:

$$I_{k,m}(d) = \int_{\Omega} u_{kl,m} b_l d\Omega. \quad (4.35)$$

Utilizando as aproximações das Eq. (4.18) e (4.19) e reescrevendo a integral da Eq. (4.35) como foi feito com a Eq. (4.21), tem-se:

$$\mathbf{I}_m(\mathbf{d}) = \sum_{j=1}^{NI} \int_{\Omega} f_j \begin{bmatrix} u_{11,m} & u_{12,m} \\ u_{21,m} & u_{22,m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_j^{(1)} \\ \gamma_j^{(2)} \end{Bmatrix} d\Omega, \quad (4.36)$$

ou melhor:

$$\mathbf{I}_m(\mathbf{d}) = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} f_1 \mathbf{U}_{,m} d\Omega & \int_{\Omega} f_2 \mathbf{U}_{,m} d\Omega & \cdots & \int_{\Omega} f_{NI} \mathbf{U}_{,m} d\Omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_1^{(1)} \\ \gamma_1^{(2)} \\ \gamma_2^{(1)} \\ \gamma_2^{(2)} \\ \vdots \\ \gamma_{NI}^{(1)} \\ \gamma_{NI}^{(2)} \end{Bmatrix}. \quad (4.37)$$

Aplicando o ponto fonte em todos os NI pontos do problema, obtém-se:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \mathbf{I}_m(\mathbf{d}_1) \\ \mathbf{I}_m(\mathbf{d}_2) \\ \vdots \\ \mathbf{I}_m(\mathbf{d}_{NI}) \end{Bmatrix}}_{\mathbf{I}_m} = \underbrace{\begin{bmatrix} \int_{\Omega} f_1 U_{,m}(\mathbf{d}_1) d\Omega & \int_{\Omega} f_2 U_{,m}(\mathbf{d}_1) d\Omega & \cdots & \int_{\Omega} f_{NI} U_{,m}(\mathbf{d}_1) d\Omega \\ \int_{\Omega} f_1 U_{,m}(\mathbf{d}_2) d\Omega & \int_{\Omega} f_2 U_{,m}(\mathbf{d}_2) d\Omega & \cdots & \int_{\Omega} f_{NI} U_{,m}(\mathbf{d}_2) d\Omega \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\Omega} f_1 U_{,m}(\mathbf{d}_{NI}) d\Omega & \int_{\Omega} f_2 U_{,m}(\mathbf{d}_{NI}) d\Omega & \cdots & \int_{\Omega} f_{NI} U_{,m}(\mathbf{d}_{NI}) d\Omega \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}_m} \begin{Bmatrix} \gamma_1^{(1)} \\ \gamma_1^{(2)} \\ \gamma_2^{(1)} \\ \gamma_2^{(2)} \\ \vdots \\ \gamma_{NI}^{(1)} \\ \gamma_{NI}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

ou:

$$\mathbf{I}_m = \mathbf{Q}_m \boldsymbol{\gamma}. \quad (4.39)$$

Utilizando o MIR nas integrais de domínio da matriz \mathbf{Q} , tem-se que ela é reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma} \mathbf{F}_{1m}(\mathbf{d}_1) \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma & \int_{\Gamma} \mathbf{F}_{2m}(\mathbf{d}_1) \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma} \mathbf{F}_{NI m}(\mathbf{d}_1) \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \mathbf{F}_{1m}(\mathbf{d}_2) \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma & \int_{\Gamma} \mathbf{F}_{2m}(\mathbf{d}_2) \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma} \mathbf{F}_{NI m}(\mathbf{d}_2) \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\Gamma} \mathbf{F}_{1m}(\mathbf{d}_{NI}) \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma & \int_{\Gamma} \mathbf{F}_{2m}(\mathbf{d}_{NI}) \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma} \mathbf{F}_{NI m}(\mathbf{d}_{NI}) \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

em que \mathbf{F}_{jm} é dado por:

$$\mathbf{F}_{jm} = \int_0^r f_j \mathbf{U}_{,m} \rho d\rho. \quad (4.41)$$

Discretizando o contorno do problema, tem-se que as integrais da matriz \mathbf{Q}_m podem ser calculadas como:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F}_{jm} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma = \sum_{E=1}^{NE} \int_{\Gamma_E} \mathbf{F}_{jm} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma, \quad (4.42)$$

e que a integral sobre cada elemento Γ_E pode ser realizada numericamente através da quadratura de Gauss.

$$\int_{\Gamma_E} \mathbf{F}_{jm} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} d\Gamma = \int_{-1}^{+1} \mathbf{F}_{jm} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} J d\xi = \sum_{i=1}^{npg} \mathbf{F}_{jm} \Big|_{\xi_i} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} \Big|_{\xi_i} J \omega_i. \quad (4.43)$$

E, também utilizando a quadratura de Gauss, é possível realizar a integração numérica da Eq. (4.41).

$$\mathbf{F}_{jm} = \int_0^r f_j \mathbf{U}_{,m} \rho d\rho = \int_{-1}^{+1} f_j \mathbf{U}_{,m} \rho \frac{d\rho}{d\xi} d\xi = \sum_{i=1}^{npg} f_j \Big|_{\xi_i} \mathbf{U}_{,m} \Big|_{\xi_i} \rho_{\xi_i} \frac{d\rho}{d\xi} \omega_i. \quad (4.44)$$

Assim como anteriormente, o MIR anula a singularidade fraca do tipo $1/r$ da Eq. (4.35), de forma que não seja necessário o cuidado especial com as integrais onde o ponto fonte pertence ao elemento integrado.

Portanto, a forma discretizada da Eq. (3.58) é:

$$\mathbf{C}\mathbf{u}_m = \mathbf{P}_m\mathbf{u} - \mathbf{O}_m\mathbf{t} - \mathbf{Q}_m\boldsymbol{\gamma}. \quad (4.45)$$

Dessa forma, as integrais de domínio das Eq. (3.21) e (3.58) são reescritas de tal forma que elas podem ser realizadas utilizando apenas a discretização do contorno e não a do domínio, como seria necessário em métodos numéricos como o dos elementos finitos e das diferenças finitas.

4.3 Solução Numérica do Problema

O problema em questão consiste em resolver as equações de Navier-Stokes simplificadas pelas hipóteses adotadas, sendo elas: regime permanente, incompressibilidade e a utilização da função de penalidade para o campo de pressão. A equação final que deve ser resolvida é dada pela Eq. (2.25). Para isso, foi feita a analogia com a mecânica dos sólidos.

Após a discretização da Eq. (3.21) e a aplicação das condições de contorno do problema, a sua solução é dada pela Eq. (4.34). Porém, o vetor \mathbf{x} depende da soma $\mathbf{b} + \mathbf{M}\boldsymbol{\gamma}$, em que $\boldsymbol{\gamma}$ é uma função das forças de campo b_i que por sua vez dependem do campo de velocidades e de suas derivadas que são determinados através de \mathbf{x} . Ou seja, para resolver o problema, é necessário saber as forças de corpo que dependem da solução do problema. Portanto, é necessário implementar um processo iterativo.

O processo é facilitado pelo fato de as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{M} e o vetor \mathbf{b} serem constantes, pois eles dependem unicamente da geometria e das condições de contorno do problema. Além disso, as matrizes \mathbf{O}_m , \mathbf{P}_m e \mathbf{Q}_m da Eq. (4.45) também são constantes, pelo mesmo motivo de só dependerem da geometria do problema. A Fig. 4.3.1 apresenta o fluxograma do algoritmo implementado.

Devido ao alto custo computacional já conhecido do Método de Integração Radial, decidiu-se por implementar a metodologia utilizando-se a técnica da computação paralela. Assim, durante a execução do programa, ele divide cada uma das matrizes em N_p blocos distintos, de forma que cada bloco possua o mesmo número de colunas da matriz original e um número de linhas aproximadamente igual ao número de linhas total da matriz original dividido por N_p , sendo N_p o número de processadores que se deseja utilizar na solução do problema. Assim, cada processador fica responsável por construir um bloco de todas as matrizes envolvidas na resolução do problema. Ao programa criado, deu-se o nome de EscoaConst2D.

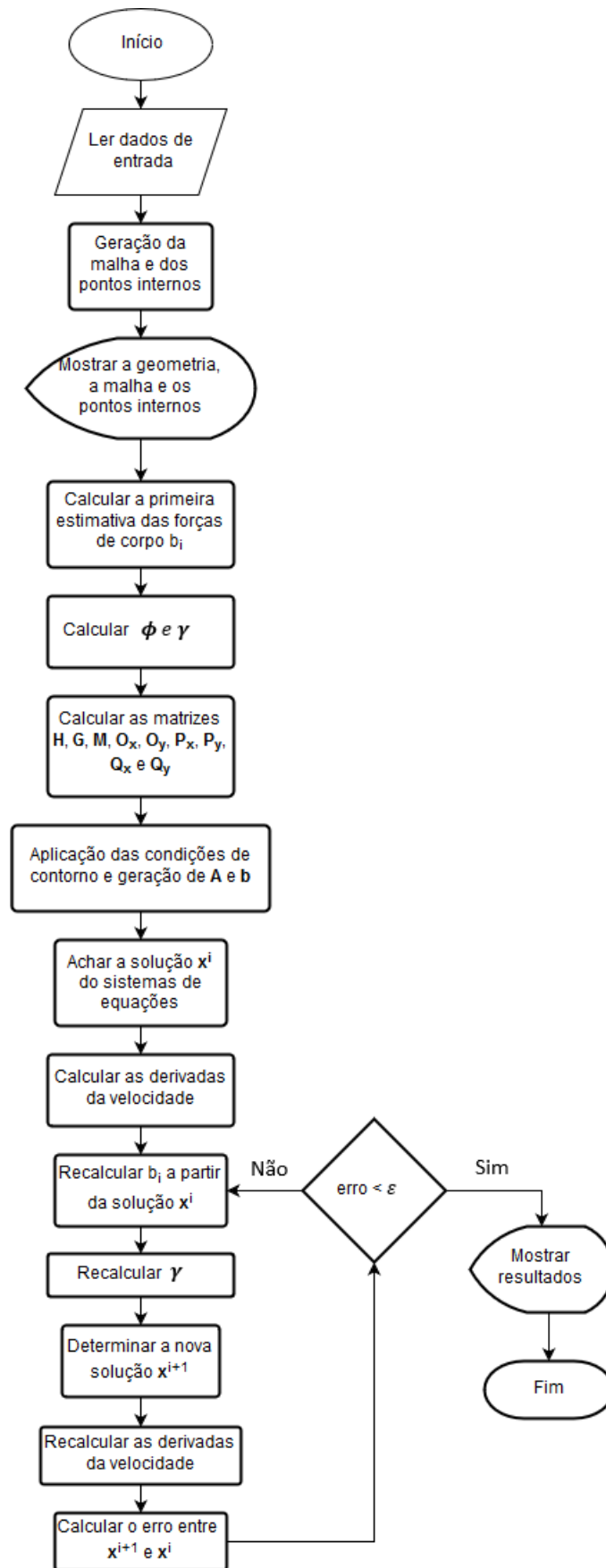


Figura 4.3.1: Fluxograma do algoritmo implementado.

5 Resultados

5.1 Validação do Código

A validação do código consistiu em comparar os resultados obtidos através dessa metodologia numérica com os resultados analíticos existentes. Os casos escolhidos para serem estudados estão dentro do conjunto de problemas em que as velocidades são perpendiculares aos gradientes de velocidades, pois, assim, o termo não linear, $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$, é zero, sendo possível encontrar soluções analíticas para os problemas. Os casos escolhidos foram: o escoamento de Couette e o escoamento de Poiseuille.

5.1.1 Escoamento de Couette

O escoamento de Couette consiste no escoamento entre placas planas gerado pelo movimento relativo de uma dessas placas. Assim, a geometria do problema e as suas condições de contorno estão dispostos na Fig. 5.1.1.

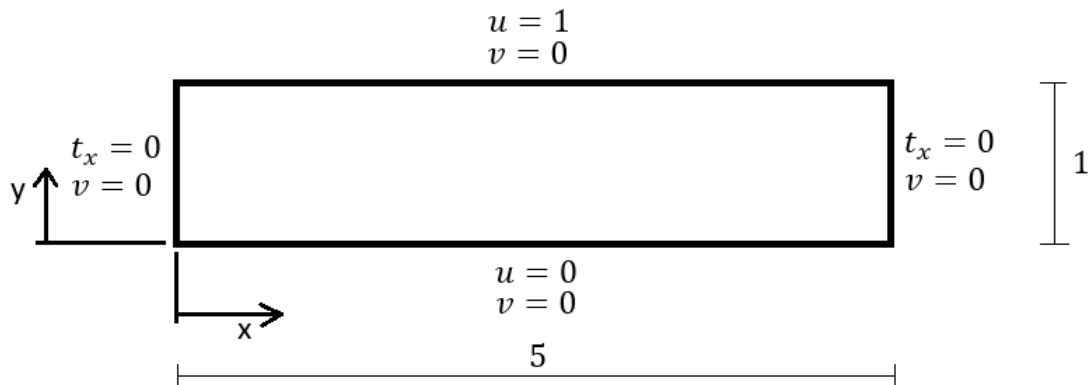


Figura 5.1.1: Geometria e condições de contorno do escoamento de Couette estudado.

A dedução da solução analítica desse escoamento é apresentada no apêndice A deste trabalho. Para o caso estudado, a velocidade $u(y)$ é dada por:

$$u(y) = y \tag{5.1}$$

e a sua única derivada não nula por:

$$\frac{du}{dy} = 1. \quad (5.2)$$

Para a solução numérica desse problema, a simulação foi feita para um fator de penalidade de $\lambda = 10^4$, utilizando 25 elementos nos segmentos maiores, 5 elementos nos menores e 5 pontos internos, conforme disposto na Fig. 5.1.2. O perfil de velocidade para a seção $x = 2,5$ é apresentada na Fig. 5.1.3. Vale ressaltar que os pontos internos foram utilizados apenas para a visualização do perfil de velocidades, uma vez que, sendo o problema linear, eles não são necessários para a sua solução.

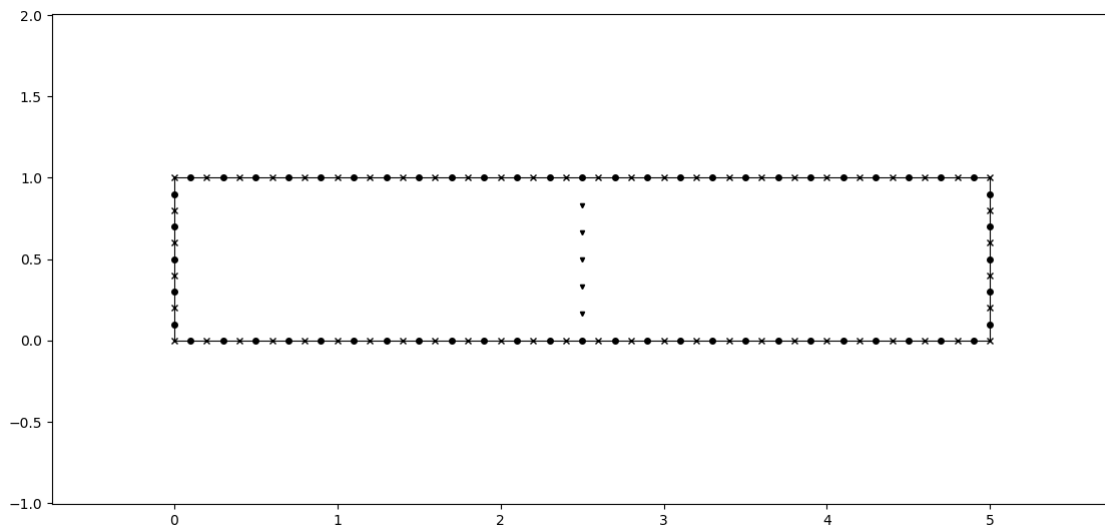


Figura 5.1.2: Malha utilizada para a simulação do escoamento de Couette.

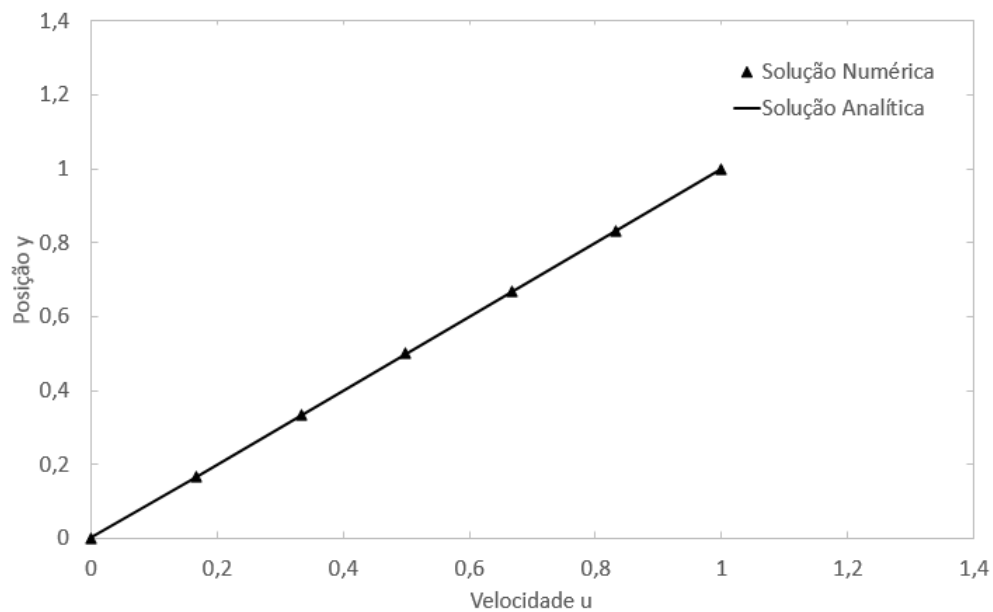


Figura 5.1.3: Perfil de velocidades resultante do escoamento de Couette em $x = 2,5$.

A tabela 5.1.1 apresenta os resultados numéricos obtidos para a velocidade, bem como uma comparação com a solução analítica para a posição adimensional $x = 2, 5$.

Tabela 5.1.1: Resultados numéricos da velocidade u para o escoamento de Couette.

Posição y	$u_{numérico}$	$u_{analítico}$	Erro Percentual (%)
0,00	0,00	0,00	0,00
0,17	0,17	0,17	7,18e-5
0,33	0,33	0,33	5,04e-5
0,50	0,50	0,50	7,99e-13
0,67	0,67	0,67	-2,52e-5
0,83	0,83	0,83	-1,44e-5
1,00	1,00	1,00	0,00

A tabela 5.1.2 apresenta os resultados numéricos obtidos para a derivada da velocidade u na direção y , bem como uma comparação com a solução analítica para a posição adimensional $x = 2, 5$.

Tabela 5.1.2: Resultados numéricos da derivada da velocidade u na direção y para o escoamento de Couette.

Posição y	$u,y_{numérico}$	$u,y_{analítico}$	erro (%)
0,00	1,00	1,00	0,11
0,17	1,00	1,00	8,34e-5
0,33	1,00	1,00	4,35e-5
0,50	1,00	1,00	1,32e-4
0,67	1,00	1,00	4,35e-5
0,83	1,00	1,00	8,34e-5
1,00	1,00	1,00	0,11

Tanto a solução numérica para a velocidade quanto para a sua derivada tiveram erros relativos bastante baixos, da ordem de $10^{-5}\%$, com exceção dos valores da derivada no contorno, que apresentaram um erro relativo de 0,11 %. Isso mostra que os resultados do código implementado estão de acordo com a solução analítica do problema.

A Fig. 5.1.4 apresenta o campo do módulo das velocidades calculadas.

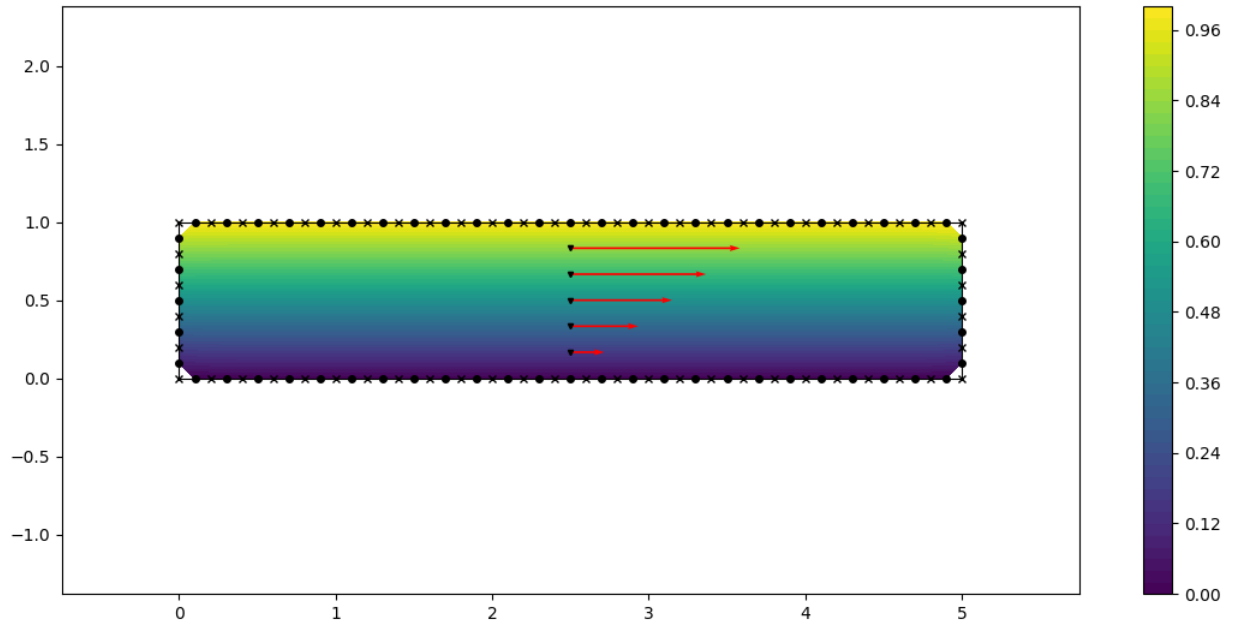


Figura 5.1.4: Campo do módulo das velocidades calculadas.

5.1.2 Escoamento de Hagen-Poiseuille

O escoamento de Hagen-Poiseuille consiste no escoamento totalmente desenvolvido entre placas planas e gerado por um gradiente de pressão. Assim, a geometria do problema e as suas condições de contorno estão dispostos na Fig. 5.1.5.

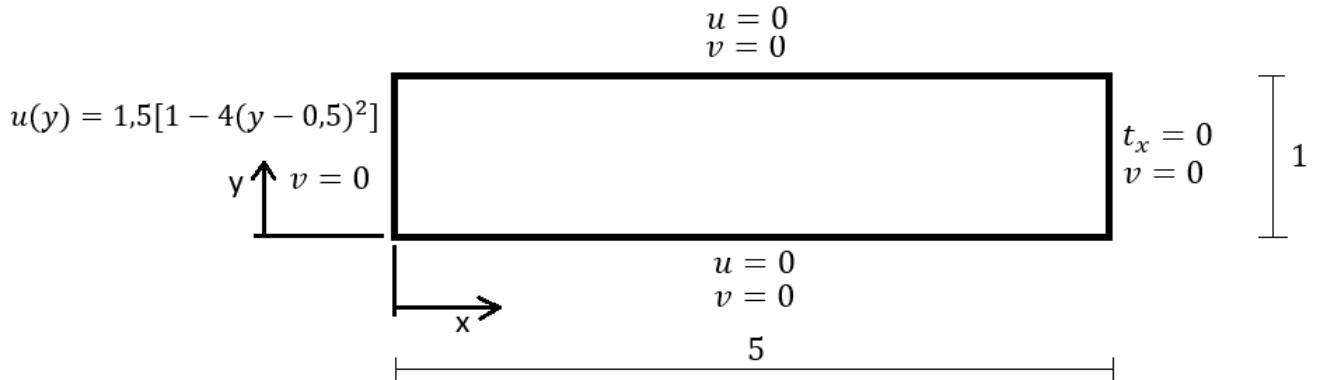


Figura 5.1.5: Geometria e condições de contorno do escoamento de Hagen-Poiseuille estudado.

A demonstração da solução analítica desse problema é feita no apêndice A deste trabalho e ela é dada por:

$$u(y) = 1,5[1 - 4(y - 0,5)^2]. \quad (5.3)$$

O problema foi simulado para um Reynolds $Re = 100$ e um fator de penalidade de $\lambda = 10^6$, utilizando 25 elementos nos segmentos maiores, 10 elementos nos menores e

5 pontos internos, conforme disposto na Fig. 5.1.6. O perfil de velocidade para a seção $x = 2,5$ é apresentada na Fig. 5.1.7.

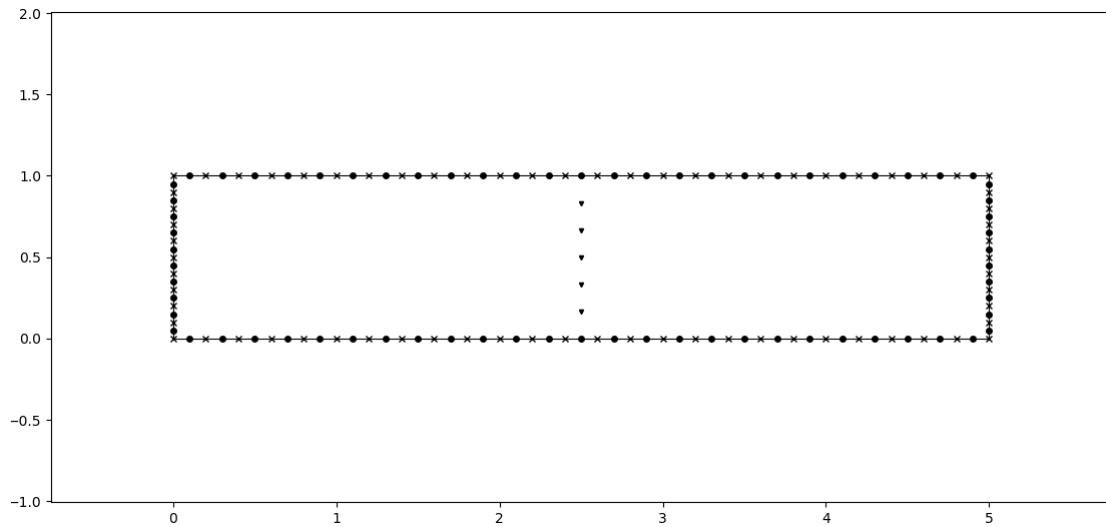


Figura 5.1.6: Malha utilizada para a simulação do escoamento de Hagen-Poiseuille.

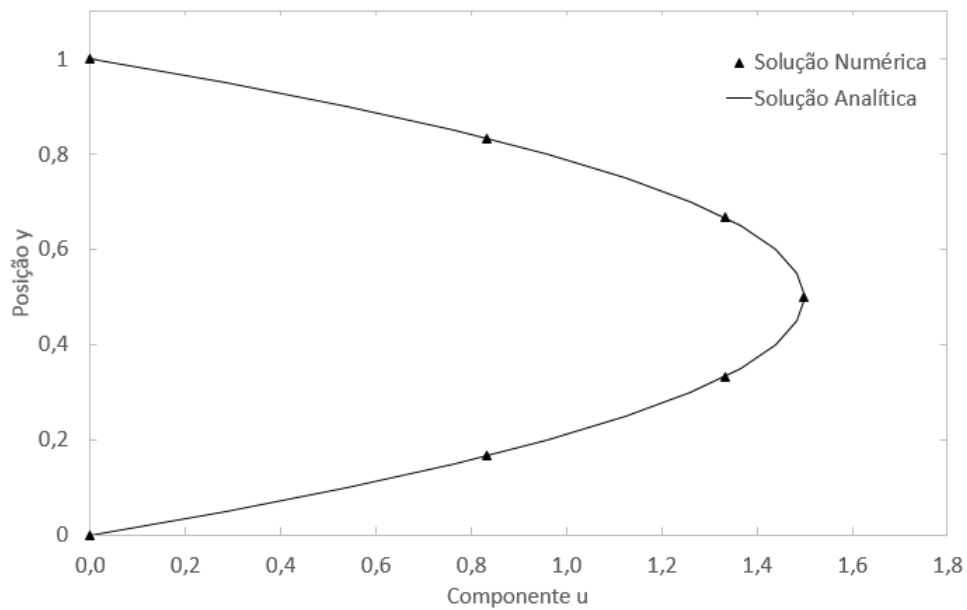


Figura 5.1.7: Perfil de velocidades resultante do escoamento de Hagen-Poiseuille em $x = 2,5$.

A tabela 5.1.3 apresenta os resultados numéricos obtidos para a velocidade, bem como uma comparação com a sua solução analítica para a posição adimensional $x = 2,5$.

Tabela 5.1.3: Resultados numéricos da velocidade u para o escoamento de Hagen-Poiseuille em $x = 2, 5$.

Posição y	$u_{numérico}$	$u_{analítico}$	Erro Percentual (%)
0,00	0,00	0,00	0,00
0,17	0,83	0,83	0,07
0,33	1,33	1,33	0,05
0,50	1,50	1,50	0,05
0,67	1,33	1,33	0,05
0,83	0,83	0,83	0,07
1,00	0,00	0,00	0,00

A tabela 5.1.4 apresenta os resultados numéricos obtidos para a derivada da velocidade u na direção y , bem como uma comparação com a solução analítica para a posição adimensional $x = 2, 5$.

Tabela 5.1.4: Resultados numéricos da derivada da velocidade u na direção y para o escoamento de Hagen-Poiseuille em $x = 2, 5$.

Posição y	$u_{,y,numérico}$	$u_{,y,analítico}$	erro (%)
0,00	5,73	6,00	4,57
0,17	4,00	4,00	0,03
0,33	2,00	2,00	0,07
0,50	0,00	0,00	-
0,67	-2,00	-2,00	0,07
0,83	-4,00	-4,00	0,03
1,00	-5,73	-6,00	4,57

O código implementado apresenta um desempenho bom para a solução da velocidade e da sua derivada, pois, para essas duas variáveis, os erros foram da ordem de $10^{-2}\%$, com exceção do cálculo da derivada sobre o contorno do problema que resultou em um erro de 4,6%. Apesar de esse erro ser maior que os outros, ele ainda é satisfatório.

Afim de investigar o desempenho do código na solução das variáveis sobre o contorno do problema, estão dispostos, nas tabelas 5.1.5 e 5.1.6, a comparação entre os resultados numéricos e analíticos da velocidade e sua derivada para a seção $x = 5, 0$ do escoamento, respectivamente.

Tabela 5.1.5: Resultados numéricos da velocidade u para o escoamento de Hagen-Poiseuille, para $x = 5, 0$.

Posição y	$u_{numérico}$	$u_{analítico}$	Erro (%)
0,05	0,27	0,29	3,56
0,15	0,76	0,77	0,34
0,25	1,13	1,13	0,17
0,35	1,37	1,37	0,32
0,45	1,49	1,49	0,36
0,55	1,49	1,49	0,36
0,65	1,37	1,37	0,32
0,75	1,13	1,13	0,17
0,85	0,76	0,77	0,34
0,95	0,27	0,29	3,56

Tabela 5.1.6: Resultados numéricos da derivada da velocidade u na direção y para o escoamento de Hagen-Poiseuille, para $x = 5, 0$.

Posição y	$u,y_{numérico}$	$u,y_{analítico}$	Erro (%)
0,05	5,50	5,40	1,79
0,15	4,26	4,20	1,41
0,25	3,03	3,00	1,09
0,35	1,82	1,80	0,91
0,45	0,60	0,60	0,83
0,55	-0,60	-0,60	0,83
0,65	-1,82	-1,80	0,91
0,75	-3,03	-3,00	1,09
0,85	-4,26	-4,20	1,41
0,95	-5,50	-5,40	1,79

Os resultados obtidos sobre o contorno do problema também tiveram erros satisfatórios, menores que 5%, porém eles foram, em média, uma ordem de grandeza maiores que os erros encontrados para a solução no domínio do problema. Este comportamento, entretanto, é esperado no método dos elementos de contorno, uma vez que, neste método, apenas as condições de contorno e as variáveis desconhecidas no contorno são aproximadas. Não existe aproximação das variáveis do domínio.

Além disso, observou-se que, tanto para o resultado dentro do domínio do problema quanto para o resultado sobre o contorno, os erros associados à derivada da velocidade foram maiores que os encontrados para a velocidade. Isso é bastante coerente, uma vez que as integrais envolvidas na determinação das derivadas possuem singularidades mais fortes que as envolvidas na solução do campo de velocidades.

5.2 Análise do Escoamento em Cavidade

A fim de testar a eficácia da metodologia desenvolvida com problemas não lineares próprios da mecânica dos fluidos, elegeu-se, para o estudo, o problema de escoamento

em cavidade. Ele consiste no escoamento dentro de uma cavidade quadrada movido pelo deslocamento da superfície superior. A geometria e condições de contorno do problema são apresentados na Fig. 5.2.1.

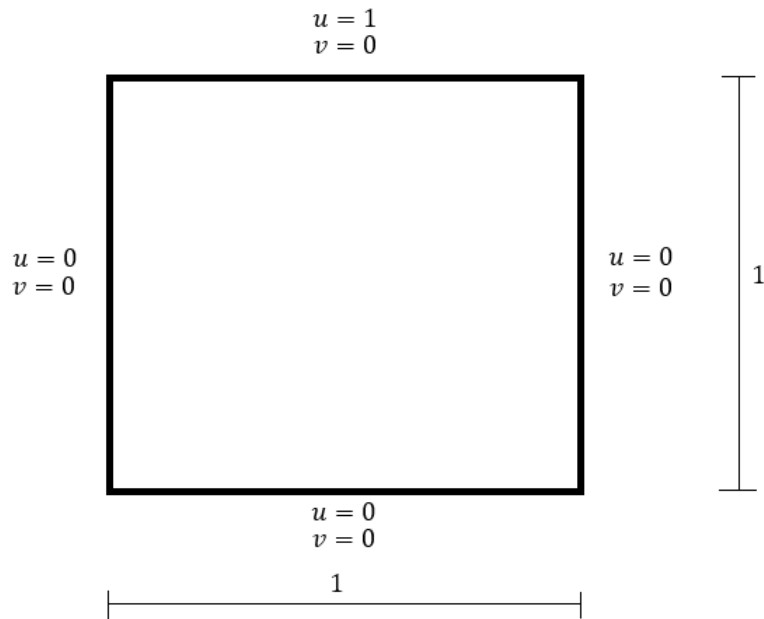


Figura 5.2.1: Geometria e condições de contorno do escoamento em cavidade estudado.

Para estudar a influência tanto da malha quanto do número de pontos internos utilizados para interpolar o termo não linear, foi feita uma análise da convergência do problema tomando como base a resposta do campo de velocidades e do $\nabla \cdot \mathbf{v}$ no ponto $x = y = 0.75$, para um fator de penalidade $\lambda = 10^4$ e um Reynolds $Re = 100$. A Fig. 5.2.2 apresenta o resultado para componente da velocidade em y , a Fig 5.2.3 apresenta o resultado para a norma da velocidade e a tabela 5.2.1 apresenta o resultado para o $\nabla \cdot \mathbf{v}$.

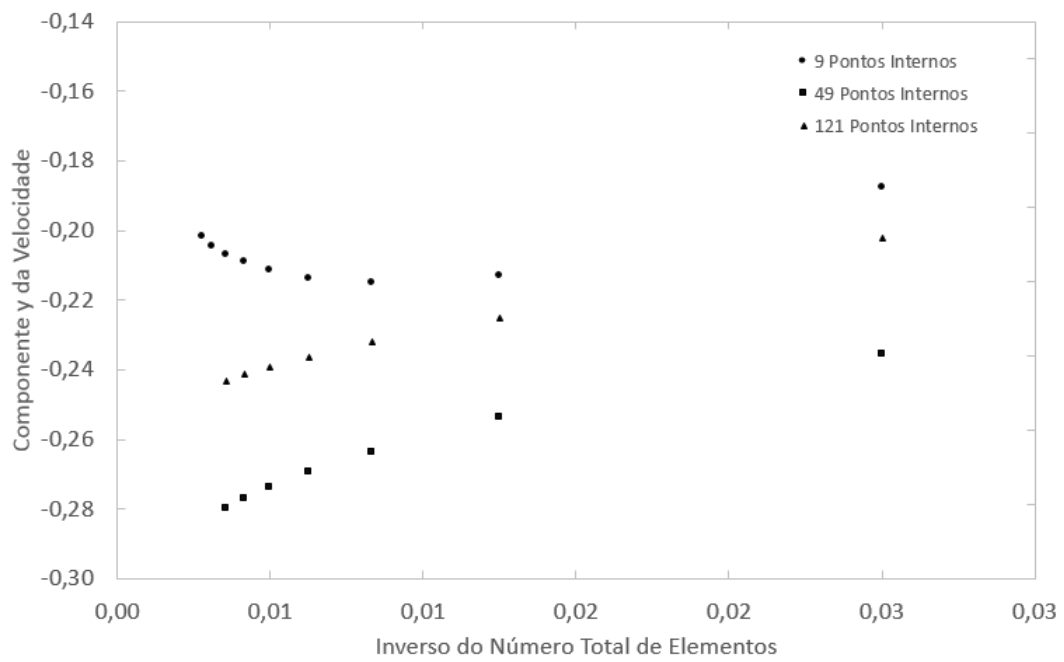


Figura 5.2.2: Análise da convergência da componente em y da velocidade no ponto $x = y = 0,75$.

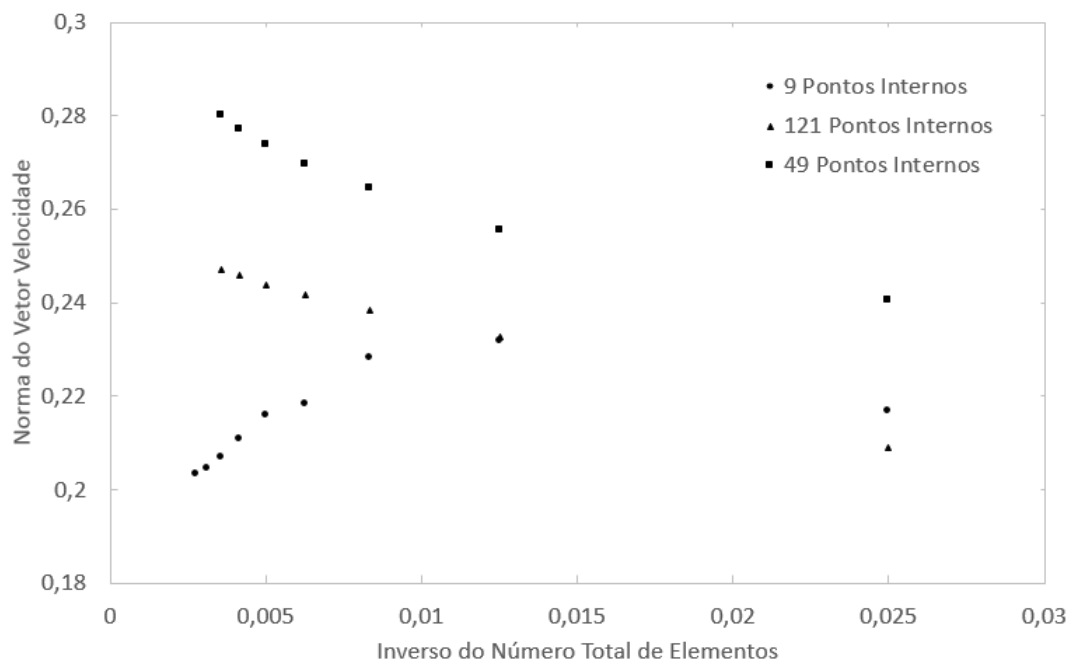


Figura 5.2.3: Análise da convergência da norma do vetor velocidade no ponto $x = y = 0,75$.

Tabela 5.2.1: Resultado para o $\nabla \cdot \mathbf{v}$ em função da malha e do número de pontos internos utilizados.

$div(\mathbf{v})$			
	Número de pontos internos		
Número de Elementos	3x3	7x7	11x11
10	-1,1e-3	-1,1e-3	-8,4e-4
20	-2,5e-4	-2,8e-4	-3,6e-2
30	-1,6e-4	-1,8e-4	-1,3e-4
40	6,3e-6	-1,3e-5	2,0e-5
50	-1,6e-5	-2,5e-5	-8,3e-6
60	-7,1e-6	-1,1e-5	-1,8e-6
70	-1,1e-4	-1,0e-4	-1,1e-4

Essa análise foi feita apenas até 121 pontos internos, pois a convergência do sistema não linear só foi obtida até essa configuração. A partir desse número de pontos, o programa passou a não convergir e nem divergir. Acredita-se que essa dificuldade está associada essencialmente à utilização de elementos constantes na solução do problema.

LIU; LI (2014) faz uma análise de convergência para o problema elástico linear utilizando elementos constantes e mostra que a convergência é bastante lenta, necessitando de mais de 100.000 graus de liberdade para atingir um erro relativo menor que 1% para o problema de uma viga em flexão. Além disso, é evidenciado que essa dificuldade está presente apenas em problemas em que exista um cisalhamento bastante acentuado, uma vez que, para o problema de uma viga em tração, atinge-se um resultado com a mesma qualidade utilizando-se menos de 1.000 elementos, ou 2.000 graus de liberdade.

Por fim, o autor associa esse problema à impossibilidade do elemento constante poder descrever rotações, assim, em problemas onde a rotação de corpo rígido e as deformações cisalhantes são dominantes no elemento, esses elementos trazem um erro bastante acentuado no processo de solução.

Como o problema do escoamento em cavidade é análogo a um problema de cisalhamento da mecânica dos sólidos, os elementos constantes são fatores dificultantes na convergência do sistema não linear, uma vez que, para se obter uma boa estimativa para a próxima iteração, seria necessário um número de elementos inviável. Porém, acredita-se que esse não seja o único motivo e, por isso, é necessária uma investigação mais detalhada do porquê dessa dificuldade de convergência.

Entretanto, analisando os gráficos das Fig. 5.2.2 e 5.2.3, percebe-se que, em relação ao número de elementos, o programa apresenta a convergência para algum valor, pois, na medida que $1/N_e$ se aproxima de zero, a curva se aproxima de uma reta, ou seja, no limite em que o número de elementos tende ao infinito, $1/N_e$ tende a zero e a curva desses gráficos atinge o valor de convergência ao cruzar o eixo y .

Para fins de comparação de resultados, utilizou-se o programa do Prof. Dr. Taygoara Felamingo de Oliveira do departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de

Brasília (UnB) cuja metodologia numérica baseia-se em diferenças finitas. Os resultados obtidos para a velocidade na direção y foi $v = -0,206$ e $|\mathbf{v}| = 0,219$. Observa-se que, em nenhuma das configurações, a metodologia converge para esses resultados. Porém, acredita-se que, caso fosse possível utilizar mais pontos internos, seria também possível obter uma convergência tanto para o número de elementos quanto para o número de pontos internos que, possivelmente, se aproximasse desses valores.

Quanto aos valores encontrados para o $\nabla \cdot \mathbf{v}$ dispostos na tabela 5.2.1, percebe-se que eles são razoavelmente pequenos, ainda mais levando em consideração que utiliza-se a técnica da função de penalidade para modelar o campo de pressão a qual acaba permitindo uma pequena compressibilidade no problema resolvido.

Em seguida, foi feita uma análise mais detalhada para o caso mais discreto, ou seja, 280 elementos na malha e 121 pontos internos. A Fig. 5.2.4 apresenta o perfil de velocidade na direção x , na seção $x = 0,5$ junto com resultados obtidos de outros pesquisadores.

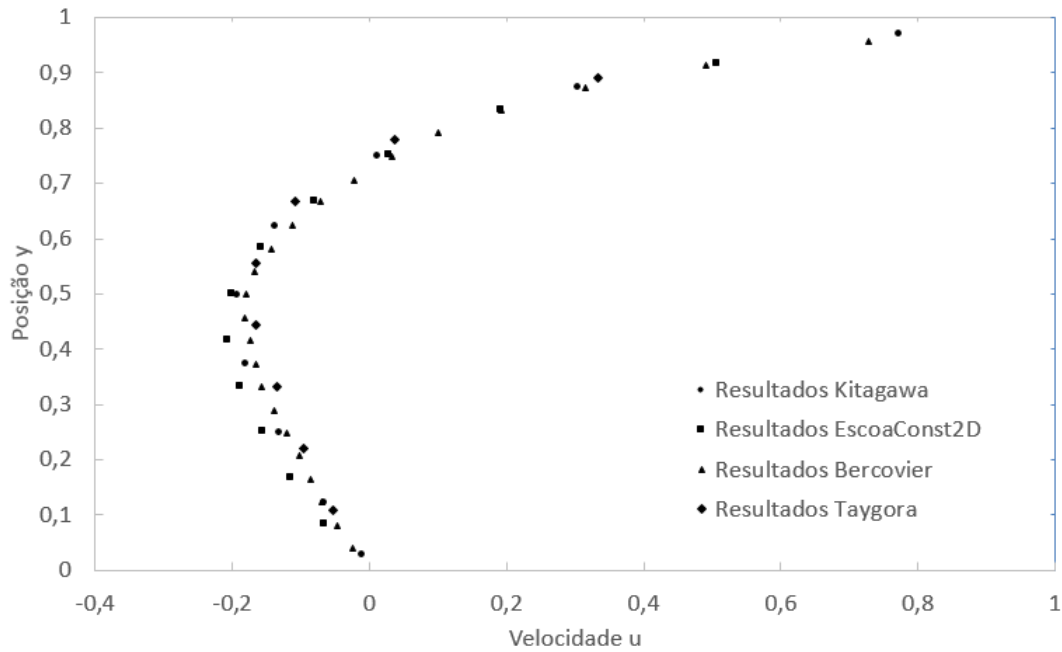


Figura 5.2.4: Perfil de velocidade na seção $x = 0,5$.

Antes de analisar a Fig. 5.2.4, é importante apresentar as peculiaridades dos métodos utilizados por cada um desses pesquisadores. KITAGAWA (2013) utiliza o Método de Elementos de Contorno com elementos lineares para as integrais de contorno, a discretização por células para as integrais de domínio e a função de penalidade para modelar o campo de pressão; BERCOVIER; ENGELMAN (1979) utiliza o Método dos Elementos Finitos e também a função de penalidade; e o Prof. Dr. Taygoara Felamingo de Oliveira utiliza o método numérico e a formulação apresentada por BROWN; CORTEZ; MINION (2001) (Método das Diferenças Finitas e Método de Projeção).

Verifica-se que o resultado obtido apresentou uma boa correspondência com os resultados da literatura que utilizam outros métodos em suas soluções, principalmente a

partir da altura $y = 0,5$. Nota-se que os resultados obtidos abaixo dessa altura apresentaram um valor ligeiramente menor que os da literatura, porém acredita-se que isso se deve à limitação no número de pontos internos e na utilização de elementos contantes.

Por fim, são apresentados as linhas de corrente e o mapa de cor do campo de velocidades na direção x obtidos pela metodologia implementada no presente trabalho e o resultado obtido pela metodologia implementada pelo Prof. Dr. Taygoara, respectivamente, nas Fig. 5.2.5 e 5.2.6.

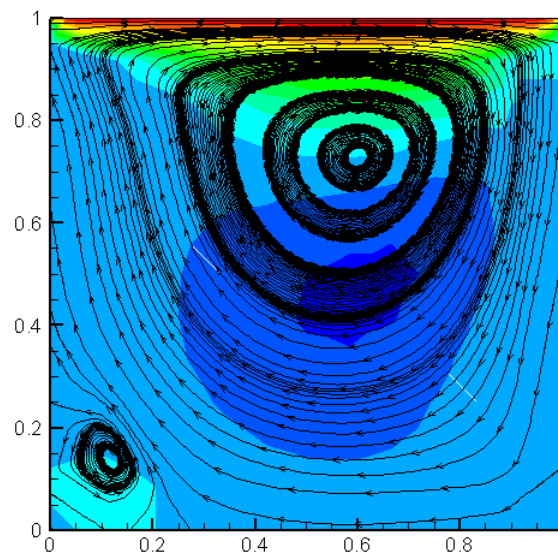


Figura 5.2.5: Linhas de corrente do resultado obtido pelo programa EscoaConst2D.

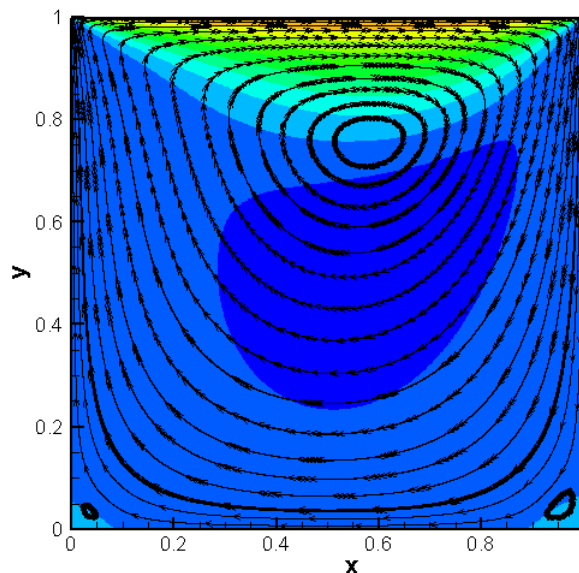


Figura 5.2.6: Linhas de corrente do resultado obtido pela metodologia implementada por Prof. Dr. Taygoara.

São observadas algumas peculiaridades na Fig. 5.2.5 tais como linhas de corrente cruzando os contornos onde as velocidades são nulas e o aparecimento de apenas uma zona de recirculação e com uma proporção muito maior do que a esperada. Acredita-se

que o cruzamento dessas linhas de corrente com contorno é devido, principalmente, à qualidade da interpolação feita pelo programa de pós-processamento, uma vez que não são utilizados muitos pontos internos na solução; e, quanto ao aparecimento de apenas uma zona de recirculação, acredita-se que o motivo disso é devido, possivelmente, pela dificuldade de obter uma convergência em relação ao número de pontos internos.

6 Conclusões e Trabalhos Futuros

6.1 Conclusões

Este trabalho propõe uma metodologia numérica baseada no métodos dos elementos de contorno para analisar o escoamento de fluidos viscosos sem precisar discretizar o domínio do problema. É apresentada a formulação matemática que descreve o movimento dos fluidos, a equação da conservação de massa e as equações de Navier-Stokes, e, em seguida, aplicadas as hipóteses simplificadoras do problema, sendo elas: escoamento em regime permanente, incompressível, com variações de altura desprezíveis e campo de pressão modelado pela função de penalidade. Com essas hipóteses, é demonstrada a analogia entre a equação governante desse problema e a equação de equilíbrio de Navier da mecânica dos sólidos. Assim, é possível utilizar a vasta literatura existente do método dos elementos de contorno aplicados a problemas elásticos para resolver esse problema da mecânica dos fluidos.

A formulação do MEC para a solução do campo de deslocamento em problemas elásticos é deduzida e detalhada, bem como a formulação para o cálculo das derivadas espaciais desse campo. Além disso, a formulação e dedução do método da integração radial, utilizado para transformar as integrais de domínio do problema em integrais de contorno equivalentes, são apresentadas.

Também é feita uma discussão bem detalhada a cerca da discretização das equações integrais de contorno do seu problema, dando enfoque na solução das integrais singulares presentes no procedimento de solução numérica do problema.

Assim, o código desenvolvido foi testado e validado para problemas em que a parte não linear, $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$, é zero, cujas solução analíticas estão disponíveis. Fez-se um estudo de escoamentos entre placas planas, em especial dos escoamentos de Couette e de Poiseuille. Os resultados numéricos obtidos foram bastante satisfatórios, sendo o erro máximo de 0,11% para o escoamento de Couette e de 4,57% para o escoamento de Poiseuille. Verificou-se que os erros encontrados nas variáveis sobre o contorno do problema são maiores que os encontrados no domínio. Além disso, verificou-se que o erro no cálculo das derivadas espaciais do campo de velocidade são maiores que o erro no cálculo das velocidades. Isso é bastante coerente, uma vez que as integrais envolvidas no processo

de determinação das derivadas possuem singularidades mais fortes que as envolvidas no processo de determinação do campo de velocidades.

Foi feito o estudo do escoamento em uma cavidade como aplicação da metodologia desenvolvida. Dentro desse estudo, foi feito tanto uma análise de convergência da metodologia quanto ao número de elemento e o número de pontos internos quanto uma análise do caso mais discretizado. Em relação à análise de convergência, verificou-se uma dificuldade na solução do sistema não linear quando se utilizou um número de pontos internos maior que 121 e atribuiu-se essa dificuldade à utilização de elementos constantes, por não conseguirem representar a rotação de corpo rígido, e a sua consequência na interpolação do termo não linear.

Apesar da metodologia não ter apresentado a convergência em relação ao número de pontos internos, ela apresentou em relação ao número de elementos utilizados na malha. Entretanto, essa convergência não foi ao encontro do resultado esperado em nenhum dos três conjuntos de pontos internos utilizados, o que era de se esperar uma vez que não foi possível alcançar uma convergência completa.

Quanto ao estudo do caso mais discretizado, o perfil de velocidades na seção central apresentou conformidade com os resultados da literatura, mas as linhas de corrente não apresentaram o comportamento exato esperado. A isso, atribui-se a culpa ao fato de estar sendo utilizado um conjunto com baixa densidade de pontos no domínio para a sua determinação.

6.2 Trabalhos Futuros

Para trabalhos futuro, é bastante interessante investigar e eliminar o problema dos elementos constantes, implementando a mesma metodologia, porém com elementos quadráticos a fim de comprovar a hipótese levantada. Além disso, outro problema que vale a pena ser explorado e melhorado é o custo computacional dessa metodologia. A fim de deixar a análise de escoamentos viscosos utilizando Método dos Elementos de Contorno mais competitiva, é bastante promissora a implementação dos elementos isogeométricos para as integrais de contorno e a utilização do Método da Reciprocidade Dual para as integrais de domínio.

Referências

- ALBUQUERQUE, d. Lima de. *Introdução ao Método dos Elementos de Contorno*. [S.l.: s.n.], 2016. Citado 4 vezes nas páginas [v](#), [15](#), [24](#) e [25](#).
- ANG, W. T. Notes on cauchy principal and hadamard finite-part integrals. 2014. Citado na página [22](#).
- ARIS, R. *Vectors, tensors and the basic equations of fluid mechanics*. [S.l.]: Courier Corporation, 2012. Citado na página [5](#).
- BATCHELOR, G. K. *An introduction to fluid dynamics*. [S.l.]: Cambridge university press, 2000. Citado 2 vezes nas páginas [4](#) e [7](#).
- BERCOVIER, M.; ENGELMAN, M. A finite element for the numerical solution of viscous incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 30, n. 2, p. 181–201, 1979. Citado na página [44](#).
- BROWN, D. L.; CORTEZ, R.; MINION, M. L. Accurate projection methods for the incompressible navier–stokes equations. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 168, n. 2, p. 464–499, 2001. Citado na página [44](#).
- CUNHA, L. H. P. d. Aplicação do método dos elementos de contorno ao escoamento de gotas em canais convergentes. 2016. Citado na página [2](#).
- GAO, X.-W. The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary-only discretization. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 26, n. 10, p. 905–916, 2002. Citado na página [24](#).
- GONTIJO, G. S. V. Aplicação do método dos elementos de contorno na simulação dos fenômenos dos cones de água e de gás em poços de petróleo horizontais. 2016. Citado na página [2](#).
- GRAEBEL, W. *Advanced fluid mechanics*. [S.l.]: Academic Press, 2007. Citado na página [52](#).
- HRIBERŠEK, M.; ŠKERGET, L. Iterative methods in solving navier–stokes equations by the boundary element method. *International journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 39, n. 1, p. 115–139, 1996. Citado na página [2](#).
- HUGHES, T. J.; LIU, W. K.; BROOKS, A. Finite element analysis of incompressible viscous flows by the penalty function formulation. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 30, n. 1, p. 1–60, 1979. Citado na página [8](#).
- KANE, J. H. Boundary element analysis in engineering continuum mechanics(book). *Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1994.*, 1994. Citado 4 vezes nas páginas [8](#), [10](#), [11](#) e [21](#).

KANWAL, R. P. *Linear integral equations*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 23.

KITAGAWA, K. *Boundary element analysis of viscous flow*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 55. Citado 4 vezes nas páginas 1, 2, 8 e 44.

LIU, Y.; LI, Y. Slow convergence of the bem with constant elements in solving beam bending problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 39, p. 1–4, 2014. Citado na página 43.

SERRIN, J. Mathematical principles of classical fluid mechanics. *Handbuch der physik*, Bd. VIII/1, Springer, Berlin, v. 8, n. Part 1, p. 125–263, 1959. Citado na página 6.

ŠKERGET, L.; HRIBERŠEK, M.; KUHN, G. Computational fluid dynamics by boundary–domain integral method. *International journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 46, n. 8, p. 1291–1311, 1999. Citado na página 2.

SOUZA, M. D. d. S. de. *IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE DIFUSÃO–ADVECÇÃO PELO USO COMBINADO DA SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DEPENDENTE COM A SOLUÇÃO INDEPENDENTE DO TEMPO*. Tese (Doutorado) — UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO, 2005. Citado na página 2.

TEMAM, R. *Navier-stokes equations*. [S.l.]: North-Holland Amsterdam, 1984. v. 2. Citado na página 8.

WROBEL, L. C. *The boundary element method, applications in thermo-fluids and acoustics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2002. v. 1. Citado na página 2.

Apêndices

A Soluções Analíticas de Escoamentos entre Placas Planas

Para os escoamentos entre placas planas, considera-se que o campo de velocidades é dado por $\mathbf{v} = (u(y), 0)$, respeitando a equação da conservação de massa, e, dessa forma, para forças de campo nulas, as equações de Navier-Stokes se reduzem a ([GRAEBEL, 2007](#)):

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{\partial P}{\partial x} \quad (\text{A.1})$$

$$0 = \frac{\partial P}{\partial y}; \quad (\text{A.2})$$

ou, em sua forma adimensional:

$$\frac{1}{Re} \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{\partial P}{\partial x} \quad (\text{A.3})$$

$$0 = \frac{\partial P}{\partial y}. \quad (\text{A.4})$$

Assim, a solução da Eq. ([A.3](#)) depende das condições de contorno do problema e da existência ou não de um gradiente de pressão.

A.1 Escoamento de Couette

O escoamento de Couette consiste em um escoamento gerado pelo movimento relativo de uma das duas placas. Como há a condição de não escorregamento na placa que está em movimento, ela induz o escoamento. O problema está resumido na Fig. ([A.1.1](#)).

No escoamento de Couette, não existe gradiente de pressão e, por isso, a Eq. ([A.3](#)) se reduz a:

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = 0. \quad (\text{A.5})$$

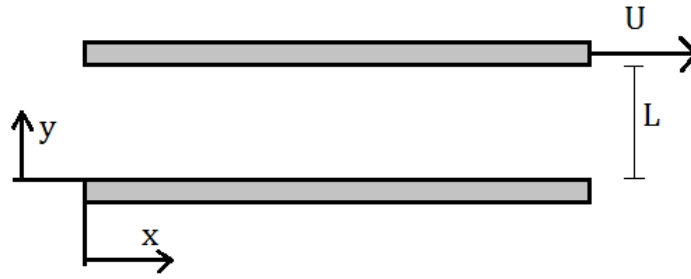


Figura A.1.1: Escoamento de Couette.

E as condições de contorno do problema são dadas pela condição de não escorregamento nas duas placas, ou seja:

$$u(0) = 0 \quad (\text{A.6})$$

e

$$u(L) = U. \quad (\text{A.7})$$

Integrando duas vezes a Eq. (A.5), obtém-se:

$$u(y) = K_1 y + K_2. \quad (\text{A.8})$$

Aplicando-se as condições de contorno, tem-se que as constantes são:

$$k_1 = \frac{U}{L}, \quad (\text{A.9})$$

$$K_2 = 0 \quad (\text{A.10})$$

e, portanto, a solução é:

$$u(y) = \frac{U}{L} y. \quad (\text{A.11})$$

A.2 Escoamento de Hagen-Poiseuille

O escoamento de Hagen-Poiseuille é o escoamento entre duas placas planas gerado por um gradiente de pressão. O problema é resumido pela Fig. (A.2.1).

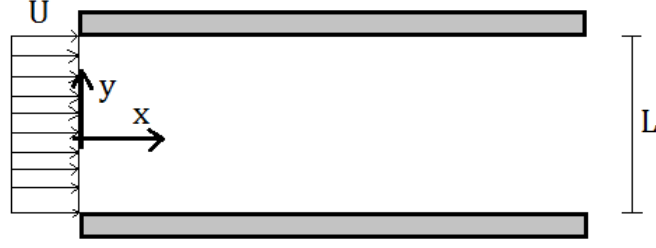


Figura A.2.1: Escoamento de Hagen-Poiseuille.

Dessa forma, as condições de contorno do problema são dadas pela condição de não escorregamento em cada uma das placas, ou seja:

$$u\left(\frac{L}{2}\right) = u\left(-\frac{L}{2}\right) = 0. \quad (\text{A.12})$$

Integrando-se a Eq. (A.3) duas vezes, tem-se:

$$u(y) = \frac{-GRe}{2}y^2 + C_1y + C_2. \quad (\text{A.13})$$

em que G é dado por:

$$G = -\frac{\partial P}{\partial x}. \quad (\text{A.14})$$

Aplicando-se as condições de contorno da Eq. (A.12) na Eq. (A.13), obtém-se que as constantes são:

$$C_1 = 0 \quad (\text{A.15})$$

e

$$C_2 = \frac{ReGL^2}{8}. \quad (\text{A.16})$$

Substituindo as Eq. (A.15) e (A.16) na Eq. (A.13), tem-se:

$$u(y) = \frac{ReG}{8}(L^2 - 4y^2). \quad (\text{A.17})$$

Resta, agora, determinar o valor de G . Para isso, será encontrada uma relação entre essa constante e a vazão adimensional do problema. Assim:

$$\begin{aligned}
Q &= \int_A u(y) dA \\
&= \int_z \int_{-L/2}^{L/2} \frac{ReG}{8} (L^2 - 4y^2) dy dz \\
&= \frac{ReG}{8} \int_z \int_{-L/2}^{L/2} (L^2 - 4y^2) dy dz \\
&= \frac{ReG}{8} \int_z \left[L^2 y - \frac{4y^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} dz \\
&= \frac{ReG}{8} \int_z \frac{2L^3}{3} dz \\
&= \frac{ReG}{8} \frac{2L^3}{3} \int_z dz \\
&= \frac{ReG}{8} \frac{2L^3}{3} L_z
\end{aligned} \tag{A.18}$$

em que L_z é o comprimento da seção transversal na direção z . Assim, a vazão adimensional por comprimento adimensional na direção z , q , é dada por:

$$q = \frac{Q}{L_z} = \frac{ReG}{8} \frac{2L^3}{3} \tag{A.19}$$

Mas, pela forma do escoamento que está entrando entre as placas planas, tem-se que q é dado por:

$$q = LU. \tag{A.20}$$

Substituindo a Eq. (A.20) na Eq. (A.19), tem-se que G é dado por:

$$G = \frac{12U}{ReL^2}. \tag{A.21}$$

Substituindo a Eq. (A.21) na Eq. (A.17), obtém-se a solução do problema:

$$u(y) = \frac{3}{2}U \left[1 - 4 \left(\frac{y}{L} \right)^2 \right]. \tag{A.22}$$